Stellenwertsystem und Ziffernrechnen als immaterielles Kulturerbe der Menschheit: ein Unterrichtsgegenstand für die Mathematik?

Positional system and digital calculation as an intangible cultural heritage of humanity: A topic in mathematics instruction?

PETER MORFELD, SCHWERTE; LOTHAR GERRITZEN (†), BOCHUM

***Zusammenfassung**:*
Ziegler betonte bereits 2011, dass Mathematik in der Schule als ein wichtiger Teil unserer Kultur mit langer Geschichte und als die Basis von Schlüsseltechnologien vermittelt werden sollte – und nicht nur als ein Werkzeugkasten. Dies trifft insbesondere auf das Stellenwertsystem und das Ziffernrechnen zu; gemeint sind die zehn Zeichen zur Zahlendarstellung (indo-arabische Ziffern) und ihre Verwendung (Ziffernrechnen im Dezimalsystem), auch in verallgemeinerter Form (Datenpräsentation, -speicherung und -verarbeitung im z.B. binären Stellenwertsystem).
Spätestens vor 1500 Jahren wurde das dezimale Stellenwertsystem in Indien vollständig entwickelt. Um 825 u.Z. erarbeitete al-Ḫwārizmī in Bagdad, wie man die Grundrechenarten mit den indischen Ziffernzahlen ausführen kann. Diese Verfahren wurden in Anlehnung an seinen Namen später Algorithmen genannt.
Alltägliches Rechnen, Wirtschaft, Mathematik und Naturwissenschaften profitierten in Europa von der Übernahme dieser revolutionären Neuerung. Al-Ḫwārizmīs Methoden haben alle Kulturkreise durchdrungen; auch der heutige, globale Prozess der Digitalisierung beruht auf der Macht des Stellenwertsystems.
Die Kulturtechnik „Stellenwertsystem und Ziffernrechnen“ wird in Schulen weitergegeben. Unterrichtende bilden seine Trägerschaft. Ohne sie ginge das Wissen um das Stellenwertsystem und seine Anwendungen in wenigen Generationen verloren.
Als Kulturerbe kam „Stellenwertsystem und Ziffernrechnen“ aus Indien über den arabischen Raum nach Europa und ist zu einem unverzichtbaren Bestandteil unserer kulturellen Grundausstattung aufgestiegen. Eine solche Errungenschaft kann bei entsprechender Bewusstmachung ein lebendiges Gemeinschaftsgefühl über Gesellschaften hinweg stiften.
Die UNESCO bezeichnet von Wissen und Können getragene nicht-physische kulturelle Formen, die von Generation zu Generation weitergegeben werden, als immaterielles Kulturerbe. Wir zeigen: Die Kulturform „Stellenwertsystem und Ziffernrechnen“ erfüllt die Kriterien eines immateriellen Kulturerbes der Menschheit.
Die damit belegte besondere kulturelle Bedeutung von „Stellenwertsystem und Ziffernrechnen“ sollte auch im Mathematikunterricht angemessen vermittelt werden und nicht allein die mit dem System einhergehenden Rechentechniken.

Abstract:
Ziegler emphasized already in 2011 that mathematics should be conveyed at schools as an important part of our culture with a long history and as the basis for key technologies, not only as a toolbox. This applies to the positional system and digital calculation particularly. We mean the ten figures for positional notation (the hindu-arabic digits) and their use (digital calculation in the decimal system), even in a generalized sense (presentation, storage and processing of data in an arbitrary positional system, e.g. with a binary base).
The decimal system was completely developed in India at least 1500 years ago. Al-Ḫwārizmī elaborated in Baghdad around 825 CE how to carry out basic arithmetic operations with Indian digits. Inspired by his name these procedures later were called algorithms.
Numeracy, economy, mathematics, and science in Europe have got much benefit from adopting this revolutionary innovation. Al-Ḫwārizmī's methods have permeated all cultural areas globally, even the current process of digitalization is based on the power of the positional system.
This technique is taught at schools. Without professional teaching our knowledge about the positional system would be lost within a few generations.
The positional system and digital calculation form a cultural asset that has developed into an indispensible element of our cultural configuration. With adequate awareness such an achievement may generate a living sense of community across societies.
The UNESCO refers to a nonphysical cultural asset that is based on knowledge and skills and transmitted from one generation to the next as intangible cultural heritage. We show: “positional system and

digital calculation" meets the criteria for a cultural heritage of humanity.
The outstanding cultural relevance of this intangible cultural heritage deserves an appropriate attendance in teaching too. The important cultural aspects of "positional system and digital calculation" should be presented as a topic of mathematics instructions at schools too. Teaching should not be restricted to the practical algorithmic aspects of the system.

Günter Ziegler, ehemaliger Präsident der Deutschen Mathematiker Vereinigung (DMV), positioniert sich in seinem provokanten Aufsatz „Mathematikunterricht liefert Antworten – auf welche Fragen?" wie folgt: die Leitfrage des Mathematikunterrichts sollte sein: „Was ist Mathematik?" (Ziegler 2011, S. 174). Denn erst wenn eine Antwort auf diese Frage vorliegt, kann man sinnvoll bewerten, wie Mathematik in der Schule geeignet gelehrt und gelernt werden sollte. Zieglers Antwort auf seine Leitfrage stellt Mathematik in Form dreier Bereiche dar: als Wissensgebiet (I), als Werkzeugkasten (II) und als Forschungsgegenstand (III) (siehe zum Zusammenspiel von II und III auch Hofstadter 1985, S. 491). Nach Ziegler „scheitert die Umsetzung eines Minimums von wirklich dringend benötigtem mathematischem Rüstzeug im Unterricht dramatisch" (also Mathematik II), und „einer der Gründe ist fehlende Motivation, und die kommt daher, dass Kinder an Mathematik II nicht allein interessiert sind, wenn nicht Mathematik I und III dazukommen" (Ziegler 2011, S. 177). „Geschichte, Anwendungen und Übersicht sind wichtig für die Motivation, als Bildungsziel – für alle" (Ziegler 2011, S. 178). Großen Wert legt Ziegler daher auf Mathematik als Wissensgebiet (Mathematik I): „Mathematik als wichtiger Teil unserer Kultur, voller Entdeckungen, Ideen, Einsichten, Probleme und Problemlösungen über Tausende von Jahren, auch als Basis für moderne Schlüsseltechnologien, der Antworten liefert auf sehr grundlegende und natürliche Fragen" (Ziegler 2011, S. 174). Somit lautet Zieglers These: Mathematik soll in der Schule als ein wichtiger Teil unserer Kultur mit langer Geschichte und als eine Basis von Schlüsseltechnologien sowie als ein Forschungsgegenstand vermittelt werden – nicht nur als ein Werkzeugkasten, der notgedrungen bisweilen verwendet werden muss, aber dem Eindruck nach viele unnütze Dinge enthält.

Wir greifen diese These auf und unterfüttern sie mit einem wichtigen Beispiel, dem Themenkomplex *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen*. Welche Rolle hat dieser Themenkomplex im Mathematikunterricht? Eine wesentliche, denn offensichtlich ist ein „Verständnis für das Stellenwertsystem … für mathematische Kompetenzen fundamental" (Hußmann und Nührenbörger 2024), und deshalb ist auch eine mathematikdidaktische Optimierung der Einführung des Stellenwertsystems im Sinne praktischer Unterrichtsvorschläge unverzichtbar.[1] Wir möchten im Folgenden aber nicht „Mechanismen von Schulunterricht" (Ziegler 2011, S. 174), also keine Unterrichtsmethodik in Zusammenhang mit dem Stellenwertsystem thematisieren, sondern unsere Arbeit soll zur Diskussion um die Inhalte des Mathematikunterrichts beitragen. Uns scheint die gesellschaftliche Relevanz des Stellenwertsystems so herausragend zu sein, dass dessen kulturelle Komponente als Unterrichtsinhalt (Mathematik I) zum technischen Verständnis des Systems (Mathematik II) hinzutreten sollte. Wie dies im Einzelnen praktisch umgesetzt werden könnte, ist allerdings ebenfalls nicht Gegenstand dieser Arbeit. Unser Ziel ist es jedoch, eine ausführliche Begründung zu erstellen, warum die kulturelle Komponente von *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* eine solch weitreichende gesellschaftliche Bedeutung besitzt, dass eine Berücksichtigung dieses Aspekts im Mathematikunterricht gerechtfertigt erscheint. Wir erarbeiten diese Begründung, indem wir im Detail aufzeigen, dass die Wissensform *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* alle Kriterien der UNESCO-Konvention (UNESCO 2003) für ein immaterielles Kulturerbe der Menschheit erfüllt, woraus sich die Unterrichtsrelevanz seiner kulturellen Komponente gemäß der Zieglerschen These unmittelbar ergibt.

Mit unserem Beitrag möchten wir insbesondere eine Diskussion in der Mathematik-Didaktik zu unserer Folgerung anregen, dass diese vorgeschlagene Erweiterung der Unterrichtsinhalte um den kulturellen Aspekt von *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* systematisch angestrebt werden sollte.

Wir orientieren die Struktur unserer Begründung an der Gliederung des Bewerbungsformulars für das Bundesweite Verzeichnis immaterieller Kulturgüter (Deutsche UNESCO-Kommission 2024f) und beantworten nach einer Begriffsbestimmung *Immaterielles Kulturerbe* in den dann folgenden Abschnitten 1 – 6 die entsprechenden Kernfragen zu einem immateriellen Kulturerbe für die Kulturform *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen, woraus sich für unsere Abhandlung folgende Gliederung ergibt*:

0. Immaterielles Kulturerbe: eine Begriffsbestimmung

1. Überblick: Um welche Kulturform handelt es sich? Welche kulturellen Aspekte sind zu betonen?

2. Wirkung: Welche Wirkung hat die Kulturform, auch außerhalb ihrer Trägergruppe? Gibt es Aktivitäten, die auf die Kulturform Bezug nehmen?

3. Geschichte: Welche historischen Aspekte sind zu berichten?

3.1 Entstehung und Wandel: Wann und wie ist die Kulturform entstanden und wie hat sie sich im Laufe der Zeit verändert?

3.2 Europabezug: Mit welchen Traditionen steht die Kulturform in anderen europäischen Ländern in Verbindung? Wie hat sich dies auf die Entwicklung der Kulturform ausgewirkt?

3.3 Reflexion: Gibt es kritische geschichtliche Aspekte, die es zu reflektieren gilt? Wie hat sich die Kulturform im Nationalsozialismus, im Mittelalter, in der deutschen Kaiserzeit und/oder der SED-Diktatur dargestellt? Gibt es aktuelle gesellschaftliche Debatten oder Kontroversen im Zusammenhang mit der Ausübung der Kulturform?

4. Umsetzung: Gibt es Faktoren, welche die Weitergabe, Praxis und Anwendung der Kulturform behindern oder gefährden könnten?

5. Trägerschaft: Welche Gemeinschaften und Gruppen sind eingebunden in die Ausübung und Weitergabe der Kulturform?

5.1 Heutige Praxis: Wie stellt sich die jetzige Ausübung der Kulturform dar?

5.2 Weitergabe: Wie wird spezifisches Wissen und Können von Generation zu Generation weitergegeben und Kontinuität vermittelt?

5.3 Kulturerbeträger: Welche Gemeinschaften und Gruppen sind Träger der Kulturform? Wie ist die Art ihrer Beteiligung an der Kulturform? Welche Organisationsform haben diese Gruppen und welche Bedeutung haben sie für den Erhalt der Kulturform?

5.4 Offenheit: Steht die Teilnahme an der Kulturform allen Interessierten grundsätzlich offen?

5.5 Aktivitäten: Welche Maßnahmen bestehen und sind geplant zur Erhaltung und kreativen Weitergabe des Kulturerbes?

6. Kulturrahmen: Gibt es ähnliche Kulturformen, zu denen Bezüge bestehen? Wie sind diese im Vergleich einzuordnen?

Wir fügen eine Diskussion der Bewertung von *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* im Auswahlverfahren in Deutschland an und enden mit einer Gesamtbetrachtung:

7. Bewertung durch die Deutsche UNESCO-Kommission und weitere Gremien

8. *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* als globales immaterielles Kulturgut der Menschheit – ein eigener Unterrichtsgegenstand im Mathematikunterricht?

9. Fazit

0. Immaterielles Kulturerbe: eine Begriffsbestimmung

„Der Begriff Kulturerbe hat sich in den letzten Jahrzehnten gewandelt und erweitert. Kulturerbe umfasst nicht mehr nur Baudenkmäler oder Kulturgutsammlungen, sondern auch lebendige kulturelle Ausdrucksformen. Diese werden als Immaterielles Kulturerbe bezeichnet“ (Deutsche UNESCO-Kommission 2020). Auf internationaler Ebene ist die United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (UNESCO) zur faktischen und rechtlichen Anerkennung des immateriellen Kulturerbes tätig geworden (Wikipedia 2024f) und hat 2003 ein Übereinkommen zur Erhaltung des immateriellen Kulturerbes verabschiedet (UNESCO 2003).[2] „Deutschland ist dem UNESCO-Übereinkommen zur Erhaltung des Immateriellen Kulturerbes 2013 beigetreten“ (Deutsche UNESCO-Kommission 2024a).

„Unter immateriellem Kulturerbe versteht man die Praktiken, Darbietungen, Ausdrucksformen, Kenntnisse und Fähigkeiten von Gemeinschaften, Gruppen und gegebenenfalls Individuen sowie die damit verbundenen Instrumente, Objekte, Artefakte und Kulturräume“ (Seng 2012; UNESCO 2003, Artikel 2.1). Gemeint ist „Kulturtradition aller Art, die nicht nurmehr im Sinne einer musealen Erhaltung oder touristischen Präsentation von Bräuchen gepflegt wird, sondern vitales, im Lebensalltag verankertes kulturelles Selbstverständnis darstellt“ (Wikipedia 2024f). „Formen des Immateriellen Kulturerbes sind von menschlichem Wissen und Können getragen. Sie sind Ausdruck von Kreativität, vermitteln Kontinuität und Identität und prägen das gesellschaftliche Zusammenleben“ (Deutsche UNESCO-Kommission 2019a, S. 10). „Immaterielles Kulturerbe wird … von Generation zu Generation weitergegeben“ (Deutsche UNESCO-Kommission 2020).

Diese Kulturformen umfassen „insbesondere auch solche, die zur Bewältigung von gesellschaftlichen Herausforderungen beitragen können“ (Deutsche UNESCO-Kommission 2014, S. 58).

Im Kern ist immaterielles Kulturerbe also eine lebendige kulturelle Ausdrucks- und Wissensform, die

a) menschliche Kreativität und menschliches Können präsentiert,

b) in ihrer Trägerschaft, welche das Kulturerbe erhält und entwickelt, Kontinuität und Identität vermittelt,

c) von Generation zu Generation durch die Kulturerbeträger weitergegeben wird.

Darstellende Künste, wie Tanz, Theater, Musik sowie überlieferte soziale Traditionen, wie Rituale und Feste, werden bisweilen als Beispiele angeführt, um das Konzept des immateriellen Kulturerbes zu erläutern (Kultusministerkonferenz 2024), aber der Begriff ist, entsprechend der von uns zu Grunde gelegten Definition der UNESCO (UNESCO 2003; Seng 2012), deutlich umfassender. Dies belegt exemplarisch die *Genossenschaftsidee* als ein seit 2014 in Deutschland anerkanntes immaterielles Kulturerbe, das 2016 als erste UNESCO-Nominierung Deutschlands in die Repräsentative Liste des immateriellen Kulturerbes der Menschheit aufgenommen wurde: die „Idee und Praxis der Organisation von gemeinsamen Interessen in Genossenschaften“ ist also ein Beispiel für ein immaterielles Kulturerbe der Menschheit (Deutsche UNESCO-Kommission 2024e).

Eine Untergruppe der immateriellen Kulturgüter bilden die bedrohten Kulturformen, die aufgrund ihrer Gefährdung effektive Erhaltungsmaßnahmen benötigen (UNESCO 2024b). Bedrohte und nicht bedrohte Kulturgüter sind zu unterscheiden und werden von der UNESCO in getrennten Listen geführt.[3] Bedrohtheit ist somit ein mögliches aber kein notwendiges Merkmal eines immateriellen Kulturerbes.

Bei einem immateriellen Kulturerbe in Deutschland ereignen sich a), b) und c) (auch) in Deutschland (vgl. Deutsche UNESCO-Kommission 2024d). Analog lässt sich der Begriff auf Bundesländer beziehen, zum Beispiel immaterielles Kulturerbe in Nordrhein-Westfalen, oder auf andere Vertragsstaaten des UNESCO-Übereinkommens (UNESCO 2003), zum Beispiel immaterielles Kulturerbe in Österreich. Der Begriff immaterielles Kulturerbe in Deutschland erfordert jedoch nicht, dass es sich um ein typisch deutsches Kulturgut handelt oder das Kulturgut originär aus Deutschland stammt. Dies belegt die *Falknerei* als ein zuerst in Deutschland anerkanntes immaterielles Kulturerbe, das aber aus dem Orient zu uns kam (Deutsche UNESCO-Kommission 2024c).

Die UNESCO verwendet für immaterielle Kulturformen, denen über den nationalen Rahmen hinausgehend eine internationale Bedeutung zukommt, den Begriff immaterielles Kulturerbe der Menschheit (Deutsche UNESCO-Kommission 2019b).[4] Die UNESCO hat einen Zielrahmen definiert, um diesen Begriff weitergehend zu operationalisieren, insbesondere im Hinblick auf internationale Beziehungen (UNESCO 2004).

Die Vertragsstaaten und der Zwischenstaatliche Ausschuss nehmen Eintragungen von Kulturformen in die jeweiligen nationalen und internationalen Listen vor, wodurch diese als zum Beispiel immaterielles Kulturerbe in Deutschland (Deutsche UNESCO-Kommission 2019a) bzw. als immaterielles Kulturerbe der Menschheit (Deutsche UNESCO-Kommission 2019b; Deutsche UNESCO-Kommission 2024b) offiziell *anerkannt* werden. Die internationale Anerkennung setzt voraus, dass die Kulturform in einem Vertragsstaat des UNESCO-Übereinkommens (UNESCO 2003) anerkannt und für eine Anerkennung auf der internationalen Ebene vorgeschlagen wurde. Die Prozesse sind beschrieben (Deutsche UNESCO-Kommission 2024d).[5]

Es gibt politische Anerkennungsvoraussetzungen. So findet auf UNESCO-Ebene „nur das immaterielle Kulturerbe Berücksichtigung, das mit den bestehenden internationalen Menschenrechtsübereinkünften sowie mit dem Anspruch gegenseitiger Achtung von Gemeinschaften, Gruppen und Einzelpersonen sowie der nachhaltigen Entwicklung in Einklang steht“ und wenn durch dessen Ausübung „die Achtung vor der kulturellen Vielfalt und der menschlichen Kreativität gefördert wird“ (UNESCO 2003, Artikel 2.1). Für Deutschland werden weitere Bedingungen und Ausschlusskriterien genannt, so muss allen Interessierten ein freier Zugang zur Kulturform gewährt sein (Deutsche UNESCO-Kommission 2024d).

Zur Abgrenzung bzw. Wechselwirkung zwischen materiellem und immateriellem Kulturerbe und zur Entwicklung dieser Begriffskategorien verweisen wir auf Seng (2014) und Seng (2017).

Zur Unterscheidung des Begriffs „kulturelles Erbe“ vom Begriff „kulturelle Geschichte“ zitieren wir Grattan-Guinness (2004, S. 2782):

“History focuses on the detail, cultural context, negative influences, anomalies, and so on, in order to provide evidence, so far as we are able to tell, of what happened and how it happened. Heritage, on the other hand, address the question “how did we get here?” where previous ideas are seen in terms of contemporary explanations and similarities are sought.”

1. *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* als Kulturform: ein Überblick

1.1 Begriffsklärung: Stellenwertsystem und Ziffernrechnen

Die Kulturform *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* umfasst die zehn Grundzeichen zur Zahlendarstellung im dezimalen Stellenwertsystem (indo-arabische Ziffern) und ihre Verwendung (Ziffernrechnen), sowie die hieraus generalisierte Form, d.h. die Präsentation, Speicherung und Verarbeitung von Daten in einem Positionssystem mit allgemeiner Basis, zum Beispiel im Binärsystem (Wikipedia 2024k). *Stellenwertsystem* und *Positionssystem* sind synonym.

Die Zeichen zur Zahlendarstellung im dezimalen Stellenwertsystem (Ziffern) sind in allen modernen Kulturen im Wesentlichen gleich und werden mit 1 2 3 4 5 6 7 8 9 angegeben (Gupta 1983; und siehe die Ergänzung zu dieser Arbeit in MacTutor 2024a). Hinzu kommt die Ziffer 0. Erst mit der Einführung eines Symbols für das Nichts bzw. die Leerstelle wird das System stimmig (Cauty & Hoppan 2006). Allerdings sind insbesondere die handschriftlichen Formen der Ziffern nicht einheitlich: „However we must not forget that many countries use symbols today which are quite different from 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9“ (MacTutor 2024a).

Anders als z.B. in der römischen Zahlendarstellung bekommt im Stellenwertsystem die gleiche Ziffer einen verschiedenen Wert - je nachdem, an welcher Stelle (Position) sie steht: in 1001 bekommt die vordere Ziffer 1 den Wert Tausend und die hintere Ziffer 1 den Wert Eins zugeschrieben. Dass die vordere Ziffer für die Zahl Tausend steht, wird aber erst klar, wenn auch die Hunderter und Zehner ausgefüllt (hier: „genullt“) werden. Mit nur wenigen Ziffern (0 – 9) können so alle Zahlen dargestellt werden (Wikipedia 2024k).

Indo-arabische Ziffernzahlen werden in allen uns bekannten Schriftsprachen, in denen sie verwendet werden, stets mit abfallenden Potenzen, z.B. Hunderter-Zehner-Einer-Zehntel-Hundertstel, und von links nach rechts, d.h. rechtsläufig geschrieben. Diese Schreibregel gilt unabhängig von der Schreibrichtung und den Zahlwortstrukturen der jeweiligen Schriftsprache, d.h. die Schreibregel gilt nicht nur für indoeuropäische Sprachen, sondern auch z.B. im Hebräischen, Arabischen, Koreanischen, Japanischen, Chinesischen oder in den drawidischen Sprachen. In linksläufigen Schriften, wie Hebräisch oder Arabisch, muss zur Umsetzung dieser Schreibregel in einem nach links von Hand geschriebenen Text für die Ziffernzahl eine Lücke gelassen werden, um die Ziffern nach absteigenden Potenzen rechtsläufig, d.h. gegen die übliche Schreibrichtung in diese Lücke einzutragen. Die Größe der Lücke muss vorab geschätzt werden, was einen Nachteil gegenüber rechtsläufigen Schriftsprachen darstellt. (Dies ist ein Hinweis darauf, dass die indo-arabische Zahldarstellung wahrscheinlich nicht in einer Sprache mit linksläufiger Schrift entwickelt wurde.) In digitalen Darstellungen, z.B. am Smartphone, stellt dies für linksläufige Sprachen aber kein Problem dar, denn anders als in der analogen Darstellung muss keine Lücke gelassen und deshalb auch ihre Größe nicht vorab geschätzt werden: die Ziffernzahl wächst zwar entsprechend der Schreibregel nach rechts, aber sie wird auf dem Display mit jeder weiter eingegebenen Ziffer komplett um eine Position nach links verschoben. Da sich die indo-arabischen Ziffern von den Zeichen der Schriftsprachen, z.B. den Buchstaben, Satz- und Operatorenzeichen, unterscheiden, sind Beginn und Ende der Ziffernfolge einer Zahl für das Programm eindeutig erkennbar.

Die Schreibweise der indo-arabischen Ziffernzahlen kann nicht sinnvoll in eine linksläufige Schreibweise mit nach links abfallenden Potenzen gedreht werden, um hierdurch linksläufigen Schriften, wie Hebräisch oder Arabisch entgegenzukommen, denn dann würden die beiden Zahldarstellungen 123 und 321 in ihrer Zahlbedeutung in rechts- und linksläufigen Schriften vertauscht. Die Bedeutung indo-arabischer Ziffernzahlen würde von der verwendeten Sprache abhängen. Die dargestellte sprachübergreifende Schreibregel (rechtsläufig und mit abfallenden Potenzen) sichert also die semantische Eindeutigkeit der indo-arabischen Zahldarstellung, unabhängig von der verwendeten Schriftsprache. Barrow sieht dies als Verwirklichung einer globalen Sprache (Barrow 2005, S. 148).

Die rechtsläufige Schreibweise der indo-arabischen Ziffernzahlen kann aber auch nicht vorteilhaft in eine linksläufige Schreibweise mit nach links ansteigenden Potenzen gedreht werden, um in dieser Form linksläufigen Schriften entgegenzukommen, denn Dezimalzahlen können unendlich viele Ziffern mit immer weiter absteigenden Potenzen besitzen. Man müsste also bei dieser Schreibweise – wie bei Anwendung der Schreibregel in linksläufigen Schriften – bereits a priori wissen, bis zu welcher niedrigsten Potenz die Darstellung laufen soll, um mit dieser Stelle das Schreiben der Ziffernzahl zu beginnen. Z.B. kann sich die niedrigste Stelle (niedrigste dargestellte Potenz) erst aus der Länge der Periode der Bruchzahl ergeben oder aus der Anforderung, eine festgelegte Zahl signifikanter Ziffern darzustellen (signifikante Ziffern folgen nach einer Sequenz allein aus Nullen: in 0,0034 sind die Ziffern 3 und 4 signifikant, d.h. 0,0034 hat zwei signifikante Ziffern). Die höchste Potenz ist dagegen immer eindeutig definiert und vorab bekannt. Deshalb macht es auch in linksläufigen Schriftsprachen Sinn, das Schreiben der Ziffernzahl mit der höchsten Stelle zu beginnen. Demgemäß sollte auch das Sprechen der Ziffernzahl, also die Zahlwörter, stets mit der höchsten Stelle der Ziffernzahl als erstem Morphem beginnen. Hinzu kommt, dass eine solche stellenwertgerechte Sprechweise von Beginn an erlaubt, die Größe der gemeinten Zahl einzuschätzen, was einen bedeutenden kommunikativen Vorteil darstellt. Die meisten Sprachen folgen in ihren Zahlwortstrukturen diesem stellenwertgerechten Schema, aber nicht alle (Berg 2024, Calude und Verkerk 2016).

Das Stellenwertsystem zur Basis 10 wird üblicherweise als Dezimalsystem bezeichnet (Wikipedia 2024k). Dieser Begriff wird allerdings auch allgemeiner für Zahlendarstellungssysteme verwendet, die mit der Basis 10 arbeiten, aber kein Positionssystem sind (Haarmann 2008, S. 39f, 83), wie etwa das römische System (welches zusätzlich von einem Fünfersystem durchdrungen ist; Wußing 2013a, S. 157). Wir beschreiben im Folgenden Eigenschaften der römischen Zahlschrift, um im Vergleich Besonderheiten des indo-arabischen Stellenwertsystems zu verdeutlichen.

Das additive römische System, wie es ab dem 1. Jh. u.Z. entwickelt und verbreitet war (Haarmann 2008, S. 106), geht von dem sich wiederholenden Grundzeichen (Zahlsymbol) I für Eins aus und kürzt die langen Zeichenketten durch fortgesetzte Bündelungen der Zahlzeichen, wobei aber auf jeder neuen Bündelungsstufe (10, 100, 1000, …) bzw. (5, 50, 500, …) ein neues Zahlsymbol (X, C, M, …) bzw. (V, L, D, …) eingeführt werden muss. Die Anzahl der notwendigen Symbole wächst somit unbegrenzt. Mit einer zusätzlichen Subtraktionsregel (Beispiel: IX statt VIIII) stemmt sich das System gegen die anwachsenden Kettenlängen, schränkt damit aber das fundamentale Additionsprinzip ein (Beispiel: MCM ist nicht um 1000 größer als MC).

Die zusätzliche Subtraktionsregel ist auch deshalb störend, da mit dieser Regel ein rudimentäres Stellenwertprinzip in das römische System eindringt: XIX und XXI bekommen ihre unterschiedliche Bedeutung als 19 und 21 erst durch die unterschiedliche Interpretation des identischen Symbols I aufgrund seiner verschiedenen Position in den Zahldarstellung: an 2. Stelle in XIX als -1 interpretiert, an dritter Stelle in XXI als +1. Auch dies hat vermutlich dazu geführt, dass die Sprechweise der römischen Zahlen ab dem 3. Jhd. zunehmend vereinheitlicht und umgestellt wurde (Schülke 1915): die Sprechweise „tredecim" („dreizehn“) wurde durch „decem et tres" („zehn und drei“) ersetzt, „unus et viginti“ („eins und zwanzig“) durch „viginti unus“ („zwanzig eins“) usw. Soll „unus et viginti“ schriftlich mit Symbolen dargestellt werden, so ergibt sich additiv in direkter Darstellung IXX, was dann kommutativ umgebaut werden muss, um die übliche Form XXI zu erreichen. Dies öffnet aber Tür und Tor, „unus et viginti“ auch als XIX darzustellen, was nach Subtraktionsregel aber 19 bedeutet. Dagegen führt „viginti unus“ bei direkter additiver Darstellung unmittelbar zu XXI, so dass kein weiterer Umbau nötig ist. Dies wirkt einer Missdeutung als XIX entgegen. "In der Zeit des Imperium Romanum gewann die Reihenfolge Zehner-Einer (in Dekreten usw.) allmählich den Vorrang, diese Sprechweise setzte sich im Laufe der Zeit eindeutig durch und hat die Zahlensprechweise der Völker des romanischen Sprachraums entscheidend beeinflußt" (Schellenberger 1953, S. 63). Wir kommen auf diese „einundzwanzig“-Problematik, d.h. auf die Diskrepanz zwischen der Struktur schriftlicher und mündlicher Zahldarstellungen in späteren Kapiteln zurück (Abschnitte 3.3 und 4).

Schriftliche Darstellungen großer Zahlen sind im römischen System aufgrund der erläuterten Probleme unklar oder unpraktisch (Ifrah 1991, S. 355ff). Ein weiterer Mangel des römischen Zahlendarstellungssystems ist das Fehlen der Null: sie wurde nicht als Zahl erkannt und erschien unnötig.[6]

Das Stellenwertsystem zur Basis 10 kommt im Unterschied zum römischen System mit einem endlichen Vorrat an Symbolen aus: den zehn indo-arabischen Ziffern, die als Figuren abstrakt für die zehn Grundzahlen aufgestellt sind, ohne offensichtlichen Bezug zu dem Alphabet einer Schriftsprache (MacTutor 2024a). Das zusätzlich zum Bündelungsprinzip verwendete Positionsprinzip erlaubt eine kompakte Darstellung auch größerer Zahlen. Es werden keine, die Grundprinzipien einschränkenden Zusatzregeln benötigt, aber die wichtige Erkenntnis, dass Null eine Zahl darstellt. „Was das System dieser Ziffern zu einem äußerst flexiblen Instrument für das Zählen und Rechnen macht, ist die gesonderte Bezeichnung der Null in der Dezimalposition. Damit wird die Schreibung der Zehner, Hunderter, Tausender usw. auf das einfachste und gleichzeitig praktischste Prinzip reduziert, das je auf die Zahlennotation angewandt worden ist … Es ist daher keine Übertreibung, wenn die Einführung der Null als revolutionäre Innovation bezeichnet wird“ (Haarmann 2008, S. 111f).

Es gibt einen weiteren, sehr wesentlichen Unterschied zwischen den beiden Zahlendarstellungssystemen. Selbst wenn wir die Nachteile der römischen Schreibweise in Kauf nähmen, bliebe die Frage unbeantwortet, wie man zum Beispiel die Division zweier großer Zahlen im römischen System ausführen kann. „Die römischen Zahlzeichen eigneten sich nicht für das praktische Rechnen“ (Haarmann 2008, S. 118). Deshalb wurde mit einem mechanischen Hilfsmittel, dem Abacus gearbeitet (Ifrah 1991, S. 136ff; Kaplan 2004, S. 118–126). „Grundsätzlicher Mangel: Die rechnerischen Operationen mit den Zahlen und die Darstellung der Zahlen stehen getrennt nebeneinander“ (Schellenberger 1953, S. 35). Ein weiterer Mangel: Kalkulationen mit dem Abacus gestatten zwar ein Ablesen des Ergebnisses, jedoch kein Nachvollziehen des Rechengangs: „fixieren konnte man nur die Ergebnisse der Operationen“ (Schellenberger 1953, S. 28). Und schließlich: die Kalkulationen werden bei größeren Zahlen mühsam oder gar unmöglich (Ifrah 1991, S. 159).

Dagegen erlaubt das Stellenwertsystem nicht nur die kompakte Präsentation größerer Zahlen, sondern auch die Entwicklung einer schriftlichen und damit in Schritten überprüfbaren Rechentechnik, selbst zur Verarbeitung beliebig großer Zahlen (Barrow 2005, S. 158; Ifrah 1991, S. 411; Wußing 2013a, S. 130). Dies bedeutete einen fundamentalen kulturellen Entwicklungsschritt, dessen Auswirkungen bis heute anhalten. Das dezimale Stellenwertsystem nimmt daher eine herausragende Position unter allen Dezimalsystemen ein, weshalb es bisweilen als *das* Dezimalsystem angesehen wird.[7]

1.2 Zusammenschau: kulturelle Aspekte von *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen*

Seine vollständige Entwicklung erfuhr das Stellenwertsystem zur Basis 10 im klassischen Indien (Ifrah 1991, S. 486). Im 9. Jh. erarbeitete Muḥammad ibn Mūsā al-Ḫwārizmī in Bagdad, wie man die Grundrechenarten mit den indischen Ziffernzahlen im Stellenwertsystem ausführen kann (Kunitzsch 2005, S. 7f). Ab dem 12. Jh. wurde das dezimale Positionssystem aus Arabien in Europa bekannt (Wußing 2013a, S. 317). Eine große Bedeutung erlangte das Werk von Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci, das auf der lateinischen Übersetzung der Schrift von al-Ḫwārizmī beruht (Wußing 2013a, S. 313–321).

Nach 1400 hat sich das Rechnen mit indo-arabischen Ziffern in Italien bei Kaufleuten durchgesetzt (Kunitzsch 2005, S. 28). Ab etwa 1500 hat die allgemeine Bevölkerung in Europa davon zunehmend Kenntnis erhalten und die Vorzüge des dezimalen Positionssystems schätzen gelernt (Ifrah 1991, S. 554). „Die Erfindung des Buchdrucks begünstigte und beschleunigte die Entwicklung und vor allem auch die endgültige Fixierung der Ziffernbilder“ (Schellenberger 1953, S. 34).

Stellenwertsystem und Ziffernrechnen sind heute weltweit verbreitet (Gupta 1983). „Das indische Zählsystem … ist auf der ganzen Welt bekannt und fast überall übernommen worden, mehr selbst als die Buchstaben des phönizischen Alphabets, in dem wir jetzt schreiben. Nichts kommt einer Weltsprache näher“ (Barrow 2005, S. 148). Schellenberger erläutert dies sehr plastisch: „Ich kann irgendeinem Menschen in Hinterindien, dessen Sprache ich nicht kenne, einen Brief schicken, der lediglich 12 Rechenaufgaben enthält. Wir haben beide für jede Zahl und für jedes Rechenzeichen durchaus verschiedene Worte, können uns sprachlich nicht verständigen, er deutet aber alle meine Aufgaben genau wie ich und rechnet sie genau wie ich. Wir haben uns mit Hilfe der Zahlen vollkommen verstanden und verständigt, während wir nicht in der Lage sind, uns über das gesprochene Wort hinweg nahezukommen“ (Schellenberger 1953, S. 34).

Die indo-arabischen Ziffern und al-Ḫwārizmīs Methoden haben heute fast alle Lebensbereiche und Kulturkreise der Erde durchdrungen, trotz deren z.T. ausgeprägter Verschiedenheit. Die Geschichte des Stellenwertsystems belegt, wie sich ein nichteuropäisches Konzept trotz eines Eurozentrismus und feindlicher Einstellungen gegenüber arabischer Kultur aufgrund sachlicher Vorteile in Europa durchsetzen kann. Eine solche gemeinsame Errungenschaft kann bei entsprechender Bewusstmachung ein lebendiges Gemeinschaftsgefühl über die Kulturen und Gesellschaften unseres Planeten hinweg stiften.

Die Erarbeitung von *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* war eine besonders nachhaltige kulturelle Leistung: „Die Weiterentwicklung nicht nur der Mathematik, sondern auch des Rechnens im Alltagsleben wäre ohne die Übernahme dieser revolutionären Neuerung nicht möglich gewesen“ (Bossong 2007, S. 80). Die Einführung von Dezimalbrüchen auf Basis des Positionsprinzips, d.h. von Kommazahlen, erlaubte den arithmetischen Umgang mit den reellen Zahlen (Menzer 2010, S. 129; Wikipedia 2024k). Ein wesentlicher Entwicklungsschritt zu der allgemeinen Form erfolgte durch Gottfried Wilhelm Leibniz, der darauf hinwies, dass neben dem Dezimalsystem auch das Binärsystem existiert, was zum Bau von Rechenmaschinen führte. Der kulturprägende Prozess der Digitalisierung mit Entwicklung von Computern, Smartphones, Internet und Künstlicher Intelligenz beruht auf der Macht des Stellenwertsystems (Breger 2009).

Eine kreative Weiterentwicklung gelang dem Mathematiker Kurt Hensel, indem er die p-adischen Zahlen einführte (Hensel 1908; Hensel 1913). In diesem Forschungsfeld konnte Peter Scholze solch bedeutende Fortschritte erzielen, dass ihm 2018 als zweitem Deutschen die Fields-Medaille zuerkannt wurde, die als Nobelpreis für Mathematik gilt (Wikipedia 2024j).

Das fundamentale Wissen um das Positionssystem und die grundlegende Fertigkeit einer praktischen Zahlenbeherrschung werden von Generation zu Generation weitergegeben. Das Stellenwertsystem wird zu diesem Zweck in Deutschland an allen Schulformen in unterschiedlichem Tiefgang unterrichtet (z.B. Kultusministerkonferenz 2022, Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen 2008). Lehrpersonen werden ausgebildet, um Kinder in diese bedeutenden kulturellen Praktiken einzuführen (Kultusministerkonferenz 2019, DMV-GDM-MNU 2008). Die Unterrichtenden bilden daher einen wichtigen Teil der Trägerschaft dieser Kulturform. Ohne sie ginge das Wissen um das Positionssystem und seine Anwendungen in bereits wenigen Generationen verloren. Die Zivilgesellschaft ist an dieser Kulturform somit intensiv beteiligt. Das Stellenwertsystem ist gesellschaftlich tief verankert.

Wir sehen kein Risiko für einen Verlust von Zahlendarstellungen mit indo-arabischen Ziffern im Positionssystem. Allerdings erfordert die Arbeit mit digitalen Geräten einen fehlerfreien Einsatz des Stellenwertsystems, da keine Verdreher toleriert werden, wie sie durch die deutsche Zahlensprechweise, zum Beispiel ein-und-zwanzig statt zwanzig-eins, provoziert werden. Bei der Einführung des Stellenwertsystems wurde versäumt, eine entsprechende Anpassung der Zahlwörter vorzunehmen, obwohl es solche Vorschläge gab (Köbel 1517, S. 22; Köbel 1522, S. 13f). Bis heute steht im deutschsprachigen Raum eine solche Reform aus. Dies erschwert das Erlernen des Positionssystems und den Umgang mit Zahlen (Gaidoschik 2015; Meyerhöfer 2015). Es gibt aktuelle Diskussionen und Reformbemühungen (Gerritzen 2008; Zwanzigeins e.V. 2024a).

Die Kulturform *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* ist kein kulturelles Beiwerk, sondern ein die gesamte Gesellschaft und ihren Lebensalltag durchdringendes immaterielles Kulturerbe. Dieses Erbe kam aus Indien über Arabien zu uns und ist zu einem unverzichtbaren Bestandteil unserer kulturellen Grundausstattung aufgestiegen. Dies gilt nicht nur für Deutschland, sondern global für alle modernen Gesellschaften. Deshalb besitzt diese bedeutende Kulturform das Potential für eine entsprechende Würdigung als ein immaterielles Kulturerbe der Menschheit.

Wir führen diese kulturellen Aspekte von *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* im Folgenden detaillierter aus.

2. Nachhaltige Wirkungen der Kulturform

Das Stellenwertsystem ist als „kulturelles Erbe“ für den direkten Zweck der Zahldarstellung offenkundig „optimal“, aber in seiner Struktur „tiefgründig“ und „schwierig“ (Barrow 2005, S. 162). Die Wirkungen sind weitreichend.

Im Stellenwertsystem gelten für endliche Kommazahlen dieselben Rechenregeln wie für ganze Zahlen (zur Geschichte des Dezimalkommas: van Brummelen 2024). Dieser flexible Umgang mit Zahlen begünstigte einen Aufschwung in Naturwissenschaften, Technik, Warenproduktion und Handel in Europa. Der Wissenschaftshistoriker Beaujouan urteilte, dass die Einführung dieser revolutionären Zahlschrift zu „einem der wichtigsten Beiträge des Mittelalters zum intellektuellen Rüstzeug der Wissenschaft des Abendlandes wurde“ (Beaujouan 1957, S. 524, Übersetzung von Ifrah 1991, S. 539).

Gottfried Wilhelm Leibniz betonte ab 1679, dass neben dem Dezimalsystem auch andere Stellenwertsysteme existieren.[8] Er arbeitete das Binärsystem aus, das nur die Ziffern 0 und 1 verwendet und in dem die heutigen Computer entsprechend den Algorithmen von al-Ḫwārizmī rechnen (Breger 2009; Leibniz 1679; Leibniz 1703). Leibniz sah die Zusammenhänge und entwickelte Rechenmaschinen (Wolf 1938). Er schuf somit eine wesentliche Voraussetzung zur Entwicklung der Computer. Siehe Abbildung 9 im Abbildungsanhang.

Durch die Kodierung und Verarbeitung von Schrift, Ton, Bildern, Filmen etc. im Binärsystem wurden industrielle Revolutionen möglich (Wikipedia 2024g). Diese Digitalisierung aller Lebensbereiche beruht auf der Nutzung des Stellenwertsystems – als Notation (Datenspeicherung) und als Algorithmus (Datenverarbeitung).

Das System lässt sich auf erweiterte Zahlenbereiche ausdehnen und erlaubt auch dort Zahlenpräsentationen: nicht nur die natürlichen und ganzen Zahlen sind darstellbar, sondern alle Brüche (als periodische Dezimalzahlen, d.h. mit sich rechts hinter dem Komma unbegrenzt periodisch wiederholenden endlichen Ziffernfolgen) und zudem alle reellen Zahlen mit Hilfe der uneingeschränkten Dezimalbruchentwicklung nach rechts hinter dem Komma (Forster 1978, S. 29f; Menzer 2010, S. 129; zur Einführung: Wikipedia 2024k). Reelle Zahlen haben eine große Bedeutung: Längen, Flächen-, Rauminhalte verschiedenster geometrischer Objekte und physikalische Größen wie Kraft, Temperatur, Masse usw. können als reelle Zahlen, nicht aber als Brüche sinnvoll definiert werden. Man kann reelle Zahlen auch anders darstellen, zum Beispiel durch unendliche Kettenbrüche, aber es ist kein Verfahren bekannt, mit solchen Darstellungen Arithmetik zu betreiben (Menzer 2010, S. 135). Das Stellenwertsystem erlaubt dagegen die Verrechnung der Zahlen mit Algorithmen für die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (und auch höherer Rechenarten).

Es gibt Weiterentwicklungen dieser aus der Schule bekannten Algorithmen, die insbesondere in der Informatik von Bedeutung sind und schnellere Berechnungen, Datenkompressionen und Datenkodierungen ermöglichen. Das Rechnen in einem Stellenwertsystem, das nicht nur positive ganze Zahlen und die Null als Ziffern verwendet, sondern zusätzlich mit negativen ganzen Zahlen als Ziffern arbeitet, führt zu einem schnelleren Divisionsalgorithmus, der sog. SRT-Division (Wikipedia 2024l). Datenkompressionsverfahren, wie Zstandard (Wikipedia 2024m), benutzen flexible Stellenwertsysteme, um ganze Zahlen darzustellen (Wikipedia 2024n). Bei der arithmetischen Kodierung werden Zeichenfolgen in den Nachkommastellen eines Binärbruchs kodiert, verwendet beispielsweise in der LZMA-, XZ- und 7z-Kodierung (Wikipedia 2024o). Es gibt zudem einen Vorschlag für ein neues Gleitkommaformat, der die Verteilung der in der Praxis häufig auftretenden gebrochenen Zahlen besser abbilden soll. So werden Zahlen um die 1 herum besonders genau erfasst und große und kleine Zahlen weniger genau (Wikipedia 2024p).

Zudem eröffnet sich mit dem Positionsprinzip ein Zugang zu deutlich weiterreichenden mathematischen Konzepten. So ergeben sich aus dem Stellenwertsystem zu den reellen Zahlen zwanglos die allgemeineren Reihenentwicklungen von Funktionen (Taylorreihen, Laurentreihen, Fourierreihen usw.: Forster 1978, S. 174–201; Endl und Luh 1979, S. 184–198), die für Mathematik und Naturwissenschaften eine herausragende Bedeutung einnehmen, da auch kompliziertere Funktionen und Zahlen numerisch in relativ einfacher Form darstellbar bzw. approximierbar werden sowie ihre Strukturen besser erfasst und dadurch Zusammenhänge offengelegt werden können (wie bei trigonometrischen und Exponentialfunktionen, Endl und Luh 1979, S. 40–43). Ein Beispiel für Zahlen: Üblicherweise werden im Stellenwertsystem die Potenzen b^n (mit natürlicher Zahl $n \geq 1$ und fester natürlicher Basis $b \geq 2$, etwa $b = 10$ im Dezimalsystem) als Nenner in den absteigenden Stellenwerten < 1 zur Zahldarstellung verwendet, d.h. zur Darstellung zum Beispiel der Eulerschen Zahl $e = 2{,}718... = 2 + 7/10 + 1/100 + 8/1000 + …$ werden im Dezimalsystem die Potenzen 10, 10^2, 10^3, … zur festen Basis 10 als Nenner in den Stellenwerten 1/10, 1/100, 1/1000, … eingesetzt. Diese Dezimalbruchentwicklung zur Eulerschen Zahl ist kompliziert, da sich keine Periode einstellt, denn e ist kein Bruch und noch nicht einmal eine sog. algebraische Zahl. Aus der Reihenentwicklung der e-Funktion ergibt sich jedoch eine simple und vorhersehbare Darstellung, und dies beruht allein auf einem Wechsel der Nenner im Stellenwertsystem. Werden die Potenzen b^n, $n \geq 1$ durch die Fakultäten $(n+1)! = 1*2*3* …. *n*(n+1)$, $n \geq 1$ ersetzt, so folgt in diesem System die einfache periodische Stellenwertdarstellung $e = 2{,}111…$ (vgl. Deiser 2022, S. 107–109).

Das Konzept der unendlichen Reihen wurde von Newton und Leibniz bei ihrer Entwicklung der Analysis umfangreich verwendet (Wußing 2013b, S.

19ff), aber findet sich bereits deutlich früher bei dem indischen Mathematiker Madhava, 1350 bis 1425 (Freistetter 2024, MacTutor 2024d). In Anlehnung an dies Konzept kann das Prinzip des Stellenwertsystems wie folgt zum Zweck der Zahlbereichserweiterung verallgemeinert werden (Keisler 2012, S. 902-913). Zunächst die Anwendung des Prinzips auf Folgen rationaler Zahlen, d.h. Verallgemeinerung auf Zahldarstellungen mit Brüchen als Ziffern, was zu einer Konstruktion der reellen Zahlen führt (Cauchy-Folgen-Konzept). Dann – in nochmaliger Erweiterung – Anwendung des Prinzips auf Folgen reeller Zahlen, d.h. Verallgemeinerung auf Zahldarstellungen mit reellen Zahlen als Ziffern, was zu einer Konstruktion der hyperreellen Zahlen führt, die neben den reellen auch unendlich viele infinitesimale sowie infinite Zahlen umfassen, und wodurch für die sog. Non-Standard-Analysis ein sicheres mathematisches Fundament geschaffen wird (Robinson-Ultraprodukt-Konzept, MacTutor 2024e). Dieser Prozess der Zahlbereichserweiterung durch Verwendung der bislang erreichten Zahlen als Ziffern in einer neuen Zahldarstellung kann ohne Ende wiederholt werden (Deiser 2021, S. 145-147).

Bis heute gibt es Weiterentwicklungen des Stellenwertsystems. Statt Zahlen nach rechts mit einer Folge von Ziffern hinter dem Komma aufzubauen, kann man im Stellenwertsystem auch an einer festen Stelle beginnen, um die Darstellung dann nach links beliebig weit zu verlängern (Delahaye 2005). Diese p-adischen Zahlen wurden von dem deutschen Mathematiker Kurt Hensel eingeführt (Hensel 1908; Hensel 1913). Sie sind ein wesentlicher Bestandteil und ein wichtiges Beweismittel der Zahlentheorie geworden (Bachman 1964; Gouvea 1993) und bis heute Forschungsgegenstand in der Mathematik.

Dies belegt insbesondere die Tatsache, dass Peter Scholze, Bonn, für seine Arbeiten über p-adische Strukturen 2018 die Fieldsmedaille verliehen wurde. Es war das zweite Mal, dass diese höchste Auszeichnung in der Mathematik an einen Deutschen ging. „Für den Internationalen Mathematikerkongress 2018 in Rio de Janeiro wurde Scholze für einen Plenarvortrag ausgewählt (p-adic geometry). Er erhielt dort für die ‚Umwälzung der arithmetischen algebraischen Geometrie über p-adischen Körpern durch die Einführung perfektoider Räume mit Anwendung auf Galoisdarstellungen und für die Entwicklung neuer Kohomologie-Theorien‘ die Fields-Medaille" (Wikipedia 2024j). Eine knappe Einführung in die Theorie der perfektoiden Räume enthält Bhatt (2014). Diese höchste Auszeichnung für Peter Scholze beruht also auf den p-adischen Zahlen: „p-adische Zahlen sind weit weg von unserer gewohnten Vorstellungswelt. Inzwischen bin ich sie so gewohnt, dass mir die reellen Zahlen komisch vorkommen“ (zitiert in Bischoff 2023). Dies belegt die Aktualität und Bedeutung des Kulturguts Stellenwertsystem in der mathematischen Forschung. Auch zeigt sich die Wandlungs- und Weiterentwicklungsfähigkeit dieser Kulturform. Die oben angeführten Beispiele aus der Informatik belegen dies ebenfalls.

Das Stellenwertkonzept ist zudem die Basis der Unvollständigkeitssätze von Kurt Gödel – für die mathematische Logik von zentraler Bedeutung und mit weitreichenden philosophischen Konsequenzen (Diskussionen in Hofstadter 1985; Nagel und Newman 2010; Penrose 1995). Die Arithmetisierung der Syntax (Gödelisierung) stellt die Kernidee des Gödelschen Beweises dar und wird mit Hilfe des Stellenwertprinzips realisiert (Hoffmann 2013, S. 127–131; Hofstadter 1985, S. 288-293; Penrose 1995, S. 148–158).

Wir möchten ergänzend auf eine wesentliche außerkulturelle Verwendung des Positionssystems hinweisen: Das Stellenwertsystem ist in allen Organismen als das 4er-System der Desoxyribonucleinsäure (DNA) zu finden, aufgebaut aus den vier Nukleinbasen als Ziffern (Wolf und Soppa 2010). Das System stellt die reflexive Kernstruktur des Lebens dar, seine Wirkung ist vergleichbar mit einer Gödelisierung (Hofstadter 1985, S. 568–577). Die kulturelle Erarbeitung des Positionssystems ist jedoch hiervon unabhängig.

3. Historische Aspekte der Kulturform

3.1 Entstehung und Wandel

Die Anfänge des Stellenwertsystems liegen im Dunkeln. Vorstufen finden sich bei den Sumerern (ab ca. 3000 v.u.Z.) und den Babyloniern (Ifrah 1991, S. 210ff, 412ff; Wußing 2013a, S. 128ff). Von „Vorstufen“ zu sprechen scheint trotz des hohen Entwicklungsstandes der mesopotamischen Positionssysteme angebracht, da ein Umgang mit der Zahl Null fehlte oder unvollständig war (Ifrah 1991, S. 416–423). Vor mindestens 1400 Jahren wurde das System in Indien komplett entwickelt (Ifrah 1991, S. 486–489, 497f; Diller 1996; Kunitzsch 2005, S. 6), wobei Kontakte zu Babylonien, vielleicht vermittelt über alexandrinische Astronomen, wahrscheinlich sind (Wußing 2013a, S. 99). Auch ein Einfluss aus

China wird diskutiert (Lam und Ang 2004). Haarmann verortet die Herkunft der indischen Zahlschrift im Aramäischen ab 1000 v.u.Z. (Haarmann 2008, S. 113f). Barrow deutet – allerdings ohne Beleg – eine mögliche Verbindung der Entwicklung eines Stellenwertsystems in Indien bis zurück zur Indus-Kultur um ca. 3000 v.u.Z. an (Barrow 2005, S. 142).

Im Unterschied zum babylonischen System mit Basis 60 entstand in Indien ein Stellenwertsystem zur Basis 10. Die Null war als Zahl ein fester Bestandteil der indischen Zahlenwelt, und das Zeichen 0 trat auch explizit in der Endposition auf, zum Beispiel in der Zahl 270 in einer Inschrift aus dem Jahr 870 u.Z. in einem Vishnu-Tempel in Gwalior (Menninger 1958, Bd. II, S. 214; Wußing 2013a, S. 99). Siehe Abbildung 1 im Abbildungsanhang. Die älteste bekannte dezimale Null zeigt die Inschrift K-127 aus dem Jahr 683 u.Z. in Sambor am Mekong, Kambodscha in der Zahl 605 (Ifrah 1991, S. 491; Diller 1996; von der Wiederentdeckung dieser Null handelt das Buch von Aczel 2015). Siehe Abbildung 2 im Abbildungsanhang. Alle genannten Systeme wurden in absteigenden Stellen von links nach rechts geschrieben, wobei in Indien neben der Zifferndarstellung aber auch Darstellungen durch Symbole bzw. Bilder in Sanskritwörtern verwendet wurden, notiert in aufsteigenden Stellenwerten von links nach rechts (Menninger 1958, Bd. I, S. 129f; Ifrah 1991, S. 493–511; Diller 1996).

Das dezimale Positionssystem ist bereits in den ersten Jahrhunderten seines Bestehens von Indien aus ost- und westwärts vorgedrungen. Inschriften aus den Jahren 683 bzw. 684 aus Kambodscha bzw. Indonesien zeigen die indische Zahlschrift; eine Übersetzung in das Chinesische erfolgte bis 750 u.Z., immer mit expliziter Erwähnung der Null (Ifrah 1991, S. 491; Gupta 1983, S. 24). Im Jahr 662 lobt Bischof Severus Sebokht von Quinnasrin in Syrien das System der indischen Zahlzeichen, nennt aber die Null nicht (Kunitzsch 2005, S. 6).

In der Zeit ab 750 fand eine Ausbreitung in die islamische Welt statt. Unter den Abbasiden bildete sich ein Großreich, in dem das Interesse an neuen Einsichten energisch gefördert wurde, insbesondere durch den Kalifen al-Maʻmūn (al-Khalili 2013; MacTutor 2024b). Diese Zeit steht für Toleranz des Islam, auch gegenüber Erkenntnissen aus anderen Kulturen (Gingerich 2006) und für eine Blütezeit der Wissenschaften, zum Beispiel in der Astronomie (Kunitzsch 2006; Strohmaier 2006a, b) und der Medizin (Pickover 2014)[9].

Um 820 u.Z. erarbeitete Muhammad ibn Musa al-Ḫwārizmī in Bagdad, wie man die Grundrechenarten mit den indischen Ziffernzahlen im Stellenwertsystem ausführen kann (Kunitzsch 2005, S. 7, 8, 21–23). Siehe Abbildung 3 im Abbildungsanhang. Diese Verfahren wurden seit dem christlichen Mittelalter in Anlehnung an seinen Namen als Algorithmen[10] bezeichnet (Ifrah 1991, S. 517–519). Später ging das Wissen um diese Zusammenhänge in Europa verloren und man rätselte zu Beginn des Computerzeitalters über die Herkunft dieser Benennung (Knuth 1981, S. 1).[11]

Al-Ḫwārizmī schrieb ein grundlegendes Buch, das nur in einer lateinischen Übersetzung erhalten ist (Wußing 2013a, S. 241). Erst 1997 wurde es vollständig ins Deutsche übertragen. Es heißt dort: „Als ich sah, dass die Inder 9 Symbole 1 2 3 4 5 6 7 8 9 für jede ihrer Zahlen aufgestellt hatten, da wollte ich von dem Verfahren etwas offenkundig machen, was leichter für die Lernenden sein würde“ (Folkerts 1997, S. 29). Die geschilderten Methoden, wie Addieren und Multiplizieren, werden heute in den Grundschulen unterrichtet. Das Buch umfasst auch eine Einführung in die Bruchrechnung und das Wurzelziehen. Obgleich al-Ḫwārizmī in dem angeführten Zitat die Null nicht nennt, war er sich der Bedeutung des Stellenwertsystems einschließlich der Null vollkommen bewusst (Flegg 1989, S. 114), inklusive dem bis heute verwendeten Kreissymbol für die Null: „Wenn nichts übrig bleibt, so setze einen Kreis, damit die Stelle nicht leer ist, sondern (damit) sich an ihr ein Kreis befindet, der ihre Stelle einnimmt, damit die Stellen nicht zufällig, wenn sie leer ist, verringert werden und man glaubt, dass die zweite (Stelle) die erste ist, und du so in deiner Zahl getäuscht wirst. So mache es auch bei allen Stellen“ (Folkerts 1997, S. 45, 47). Dies gilt auch hinsichtlich der Rechenoperationen, wie z.B. der Multiplikation mit Null: „In gleicher Weise ist alles, was mit einem Kreis multipliziert wird, `nichts´“ (Folkerts 1997, S. 57). Ausführlich erläutert al-Ḫwārizmī die Struktur des Stellenwertsystems, abstrakt und mit Beispielen, auch an großen Zahlen mit Zwischennullen wie 1180703051492863 (Folkerts 1997, S. 32 – 45).

Ab dem 10. Jh. drang das dezimale Positionssystem aus dem arabischen Sprachraum nach Spanien und von dort in andere europäische Länder. Die älteste belegte Erwähnung der indo-arabischen Ziffern findet sich in einer spanischen Handschrift aus dem Jahre 976 (Ifrah 1991, S. 530). Das System setzte sich aber erst nach einer zweiten Übernahmewelle ab dem 12. Jh. in Europa durch, d.h. nach der Übersetzung des Buchs von al-Ḫwārizmī (Kunitzsch 2005,

S. 20; Wußing 2013a, S. 274, 317). „Auf dem Gebiet der Arithmetik war al-Ḫwārizmīs Schrift das einzige Werk, das im 12. Jahrhundert ins Lateinische übersetzt wurde" (Kunitzsch 2005, S. 23). Wer die Übersetzung anfertigte, ist unbekannt. Die arabische Originalfassung ging leider verloren (Kunitzsch 2005, S. 7). Lange war allein eine lücken- und fehlerhafte lateinische Version aus dem 13. Jahrhundert verfügbar („Cambridger Handschrift"), in der häufig die wichtigen Stellen mit den indischen Ziffern freigelassen sind (Kunitzsch 2005, S. 22; Wußing 2013a, S. 241). Es war daher „eine mathematikhistorische Sensation, als es M. Folkerts gelang, in New York eine vollständige lateinische Fassung der Arbeit von al-Ḫwārizmī zu entdecken. Diese Bearbeitung enthält auch die indischen Ziffern" (Wußing 2013a, S. 241). In einer Gesamtbewertung spricht Haarmann (2008, S. 113) von einem nachhaltigen Eindruck und einem entscheidenden Einfluss al-Ḫwārizmīs, denn diese Übersetzung seines Buchs hatte weitreichende Wirkungen.

Rechnungen wurden traditionell bis ins späte Mittelalter mit dem Rechenbrett, dem Abacus ausgeführt, da die verwendeten römischen Ziffern keine effektive Arithmetik erlaubten, aber der Abacus nach entsprechender Einübung einen automatisierten Umgang mit Zahlen ohne Nachdenken ermöglichte (Haarmann 2008, S. 118; Kaplan 2004, S. 118–126). „Mit dem Bekanntwerden der indo-arabischen Arithmetik und klarerer Formen der dazugehörigen Ziffern durch die lateinischen Übersetzungen des 12. Jahrhunderts verlor der Abacus in Europa seine Bedeutung" (Kunitzsch 2005, S. 21).

Um 1200 waren im Mittelmeerraum europäische und arabische Kaufleute in Kontakt. Leonardo von Pisa, auch Fibonacci genannt (Siehe Abbildung 4 im Abbildungsanhang), hat arabisches Wissen aufgenommen und 1202 ein Buch über das Ziffernrechnen mit dem Titel „Liber Abbaci" verfasst (Kunitzsch 2005, S. 22f; Wußing 2013a, S. 313–321), das erst kürzlich vollständig ins Englische übersetzt wurde und wie folgt beginnt[12]: "The nine Indian figures are: 9 8 7 6 5 4 3 2 1. With these nine figures and with the sign 0 which the Arabs call zephir any number whatsoever is written, as is demonstrated below" (Sigler 2002, S.17). Sicher ist, dass Fibonacci al-Ḫwārizmī als Quelle benutzte (Maurer 2017, S. 97; Wußing 2013a, S. 317). „[A]uffällig ist das völlige Fehlen einer Verneigung vor dem Göttlichen. Im Liber Abaci klingen nie religiöse Töne an. Fibonacci versicherte, der ‚Zugang zu allen dunklen Geheimnissen'[13] würde, endlich, nichts weiter sein als eine schlichte Frage der Logik" (Olivastro 1995, S. 227). Fibonaccis Wissen verbreitete sich in den folgenden drei Jahrhunderten von Italien aus langsam in die wichtigsten Staaten Europas. Aus dem arabischen Wort sifr (bei Fibonacci: zephirum), selbst eine Übersetzung des indischen sunya („leer"), entwickelten sich Ziffer, Chiffre und Zero (Kaplan 2004, S. 105ff; Kunitzsch 2005, S. 10).

Nach 1400 hat sich das Rechnen mit indo-arabischen Ziffern in Italien bei Kaufleuten durchgesetzt (Kunitzsch 2005, S. 28). Ab etwa 1500 (Buchdruck) hat die allgemeine Bevölkerung in Europa davon Kenntnis erhalten und die Vorzüge des dezimalen Positionssystems zunehmend schätzen gelernt (Ifrah 1991, S. 554). Es dauerte jedoch bis zum Ausgang des Mittelalters bis al-Ḫwārizmīs Verfahren auch in Deutschland Fuß fassten (Wußing 2013a, S. 328ff).

Gregor Reisch fertigte vor ca. 500 Jahren einen Holzschnitt an, in dem Frau Arithmetica in engelhafter Gestalt die indo-arabischen Ziffern nach Deutschland bringt, und das Ziffernrechnen über das Abacusrechnen siegt (Barrow 2005, S. 156–158; Ifrah 1991, S. 147; Kaplan 2004, S. 124f; Wußing 2013a, S. 311). Siehe Abbildung 5 im Abbildungsanhang.

Adam Ries schrieb: „Nummerieren heißt zählen und lehrt, wie man jede Zahl schreiben und aussprechen soll. Dazu gehören zehn Ziffern, die so geschrieben werden: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0. Die ersten neun haben einen Wert. Die zehnte gilt allein nichts, außer wenn sie anderen Ziffern nachgesetzt wird" (Ries 1522, S. Aij; Text in heutiges Deutsch übertragen). Danach werden die arithmetischen Grundoperationen in schriftlicher Form behandelt. Es bleibt unklar, ob Ries die Rechenbücher von al-Ḫwārizmī oder Fibonacci kannte, und ob daher die Redewendung „das macht nach Adam Riese" historisch vollständig gerechtfertigt ist. Siehe Abbildungen 7 und 8 im Abbildungsanhang.

In China entstand ein dezimales Stellenwertsystem, in dem – wie im indo-arabischen System – in absteigenden Stellen von links nach rechts geschrieben wurde (Wußing 2013a, S. 52f). „Die … verwandte Zahlschrift – das Positionssystem der chinesischen Strichziffern – wurde mindestens seit der Han-Dynastie benutzt (206 v.Chr.–220 n.Chr.); Einzelheiten über diese Zahldarstellung sind zwar erst aus dem 2. Jahrhundert v.Chr. überliefert, aber es könnte sehr wohl sein, daß sie aus einer wesentlich älteren Epoche stammt" (Ifrah 1991, S. 429). „Erst um den Beginn des 8. Jahrhunderts n. Chr. haben die chinesischen Gelehrten – zweifellos unter dem

Einfluss der indischen Mathematiker – einen kleinen Kreis als Zeichen eingeführt, um das Fehlen von Einheiten zu kennzeichnen“ (Ifrah 1991, S. 434, 511–514). Es gibt allerdings auch die abweichende Auffassung von Lam und Ang (2004), wonach die Erarbeitung des dezimalen Positionssystems und der Null der chinesischen Kultur zuzurechnen sei und durch Verbreitung des Sunzi Suanjing[14] von China über Indien und Arabien nach Europa gelangte (Wußing 2013a, S. 53, 100).

In Mittelamerika „entwickelten die Gelehrten der Maya in der klassischen Epoche (3. – 9. Jh. n.Chr.) eine Positions-Zahlschrift mit der Null“ (Ifrah 1991, S. 472). Diese Errungenschaft beruhte auf Vorleistungen, die wahrscheinlich bis zu den Olmeken (ca. 1500 bis 400 v.u.Z.) zurückführen (Haarmann 2008, S. 61f). Das Positionssystem der Maya war allerdings „unrein“, da es mit der Basis 20 beginnt, aber dann – insbesondere in der Kalenderdarstellung – auf den Multiplikator 18 wechselt (Wußing 2013a, S. 30f).

Das Stellenwertsystem ist somit im Laufe der Geschichte an vier Orten in relativer Unabhängigkeit entwickelt worden (Mesopotamien, Indien, China, Mittelamerika), wobei – mit Ausnahme Mittelamerikas – kulturelle Kontakte sicherlich bestanden. Das System zur Basis 10 wurde allerdings allein in Indien vollständig entwickelt und von dort global exportiert.

Für weitere Details zur Struktur und Entwicklung der Stellenwertsysteme in China und Mittelamerika verweisen wir auf Alten et al. (2003), Barrow (2005), Kaplan (2004), Katz (1993) und Tropfke (1980). Eine Darstellung zu indischen und arabischen Texten über das Rechnen, sowie zu Leben und Werken von al-Ḫwārizmī und den Übersetzungen seiner Arithmetik enthalten die Kapitel 1 – 4 von Folkerts (1997).

3.2 Europabezug

Im klassischen Griechenland war kein Stellenwertsystem bekannt, und Zahlen wurden in einem schwerfälligen dezimal orientierten Alphabetsystem notiert, alphanumerische Notation genannt (Kaplan 2004, S. 26ff; Kunitzsch 2005, S. 2–5). So stand der Buchstabe Alpha für die Zahl Eins, Beta für die Zahl Zwei, …, Theta für die Zahl Neun, Iota für Zehn, Kappa für Zwanzig, …, Pi für Achtzig, …, Omega für Achtundert. Es gab in dem System kein Zeichen für die Null [die spezielle Hypothese, wonach der Buchstabe Omikron für das Zeichen 0 Pate stand oder gar als Zahl Null verwendet wurde, ist unwahrscheinlich, da Omikron bereits die Zahl Siebzig darstellte (Kaplan 2004, S. 28; Kunitzsch 2005, S. 37)]. In diesem System war ein Zeichen für die Null unnötig und nicht sinnvoll integrierbar (Seife 2000, S. 25f). Unabhängig davon, war „[d]er griechischen Zahlennotation …ein langes Nachleben im Mittelalter und darüber hinaus beschieden“ (Kunitzsch 2005, S. 5).

„Die europäische Antike hat zwei Modelle der Zahlenschreibung hervorgebracht: zum einen das Prinzip der Zahlbuchstaben, zum anderen die Parallelverwendung zweier unabhängiger Notationssysteme, eines für die Schreibung von Sprache und ein anderes für die Wiedergabe von Zahlen. Die Griechen verwendeten Zahlbuchstaben … Etrusker und Römer … dagegen ein von der Schrift unabhängiges System von Zahlzeichen“ (Haarmann 2008, S. 98f). Die Etrusker besaßen vor Übernahme der griechischen Alphabetschrift vermutlich eine altägäische Silbenschrift und behielten die zugehörige ältere Zahlenschreibung – ähnlich zum mykenischen oder minoischen System – auch später bei (Haarmann 2008, S. 99). Das römische Zahlendarstellungssystem wurde von dem etruskischen zweifelsfrei beeinflusst (Wußing 2013a, S. 157). Einige der verwendeten Ziffernzeichen sind sehr alt und leiten sich vom Gebrauch des Kerbholzes ab (Ifrah 1991, S. 181f). Keines dieser Zahlendarstellungssysteme war ein Positionssystem.

Trotz der substanziellen Nachteile (siehe Diskussion des römischen Systems in Abschnitt 1) stand man dem aus dem arabischen Sprachraum eindringenden Stellenwertsystem in Europa äußerst skeptisch gegenüber. „Dies hatte unter anderem einen soziologischen Grund: Dezimalzahlen galten lange Zeit als Symbole des bösen muslimischen Feindes“ (al-Khalili 2013, S. 171), aber es gab auch inhaltliche Schwierigkeiten: "Wir verstehen den hartnäckigen Widerstand des frühen Mittelalters gegen die neue Zahlschrift, die uns fast leichter erscheint als die schwerfällige römische, heute nicht mehr. [Jedoch besaß] das Volk im Rechenbrett ein … im Wesentlichen gleichwertiges und vor allem anschaulicheres Rechenmittel. Und anschaulich im gleichen Ausmaß war die neue Zahlschrift nicht, im Gegenteil, sie barg ein geistiges Hindernis in sich, das in den ersten Jahrhunderten kaum überwunden wurde: die Null!" (Menninger 1958, Bd II, S. 239).

Die Ziffer 0 bereitete Verständnisschwierigkeiten, weil sie einerseits „nichts“ bedeutet, andererseits den Wert der vorangehenden Ziffern verzehnfachen kann. Sie wurde in Europa vor 1500 sogar als

Teufelszeug gebrandmarkt (Menninger 1958, Bd. II, S. 215; Kaplan 2004, S. 108). William of Malmesbury, ein bedeutender englischer Geschichtsschreiber des 12. Jahrhunderts, beschrieb die Schriften al-Ḫwārizmīs, die Adelard von Bath von seinen Reisen nach England mitbrachte, als „gefährliche sarazenische Magie“ (Kaplan 2004, S. 78).

Nach Flegg (1989, S. 128) wurden die "Hindu-Arabic Numerals" in Europa "from below" eingeführt, "when bankers, traders, merchants and other for whom arithmetical calculations were part of the daily task became aware of, and adopted, the new system." Dies geschah in der Renaissance. Vor 1500 hatten die indo-arabischen Ziffern kaum Bedeutung in Europa (Flegg 1989, S. 126).

Der Einzug des dezimalen Stellenwertsystems war aber nicht nur für Wirtschaft und Bevölkerung in Europa wichtig, sondern auch für die europäische Wissenschaft. Archimedes, der bedeutendste Mathematiker des antiken Griechenlands, versuchte sich in der systematischen Konstruktion extrem großer Zahlen, aber ein Durchbruch zum Stellenwertprinzip gelang ihm nicht (Kaplan 2004, S. 39–43). „Wie konnte er das übersehen?“ fragte Carl Friedrich Gauß, einer der größten Mathematiker aller Zeiten, und er kommentierte zu Archimedes und dem Stellenwertsystem: "auf welcher Höhe würde sich jetzt die Wissenschaft befinden, wenn er jene Entdeckung gemacht hätte" (Kaplan 2004, S. 41). Gauß geht es in seiner Bemerkung nicht nur um eine elegante Rechentechnik, sondern auch um den Anstoß zu bahnbrechenden Entwicklungen auf Basis des Positionssystems (siehe Abschnitt 2).

Im abendländischen Kulturkreis wurde lange Zeit versäumt, auf al-Ḫwārizmī als den Urheber dieser Rechenmethoden (Algorithmen) hinzuweisen (so auch Olivastro 1995, vgl. Fußnote 10). In einem deutschen Standardwerk zur Mathematikgeschichte aus den 1960er Jahren (Becker 1975) bleiben die Mathematiker des arabischen Mittelalters unerwähnt. („Arabic mathematics: forgotten brilliance?“ MacTutor 2024c). Eine solche Fixierung auf europäische Kulturleistungen war durchaus Tradition, sodass als Gegenbewegung von der UNESCO „Maßnahmen des Welterbekomitees gegen [den] Eurozentrismus“ entwickelt wurden (Seng 2012, S. 5). *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* macht in dieser Hinsicht keine Ausnahme.

Es ist heute leichter möglich, das Bewusstsein auf die bahnbrechenden Leistungen der arabischen Wissenschaften von etwa 800–1100 hinzulenken. In einer Zeit, in der Flüchtlinge aus islamischen Ländern nach Europa kommen und Fragen der Integration dieser Menschen diskutiert werden, kann man sinnvoll darauf hinweisen, dass die zehn indo-arabischen Ziffern und das Stellenwertsystem samt der von al-Ḫwārizmī dargelegten Rechenoperationen seit Jahrhunderten gemeinsames Kulturgut der arabischen und der europäischen Welt sind. Al-Ḫwārizmīs System hat zur Bewältigung wichtiger gesellschaftlicher Herausforderungen, wie dem sicheren kaufmännischen Rechnen, entscheidend beigetragen und weltweit eine einheitliche Kommunikation über Zahlen ermöglicht. Es war ein Antrieb zur tiefgreifenden Modernisierung der Gesellschaft. Dies ist ein Beispiel dafür, wie kulturelle Unterschiede in einem sachorientierten Prozess überwunden werden können.

3.3 Reflexion der Geschichte und der Entwicklung

Seit der Renaissance entstanden keine Kontroversen um das Stellenwertsystem im deutschen Sprachraum, weil das Rechenbuch von Adam Ries (Ries 1522) für die Gesellschaft so überzeugend war. In der Zeit des Nationalsozialismus gab es Vertreibungen von deutschen Mathematikern und die sogenannte „Deutsche Mathematik“, mit verheerenden Folgen für den Wissenschaftsstandort Deutschland, speziell für Mathematik und Physik (Peckhaus 1984; Wikipedia 2024d; (Wußing 2013b, S. 363-370). Vergeblich hatte der hochgeachtete Nobelpreisträger Max Planck versucht, Adolf Hitler in einem Gespräch auf diese schwerwiegende Problematik hinzuweisen (Wußing 2013b, S. 367). Jedoch gab es während der Zeit des Nationalsozialismus keine politischen Bestrebungen, auf das Stellenwertsystem Einfluss zu nehmen. Wir möchten allerdings anmerken, dass Niederstenbruch 1942 einen Aufsatz mit dem Titel „Zum ‚Rösselsprung‘ bei den Zehnerzahlen“ publizierte und dort auf S. 80 zur Rechtfertigung der verdrehten deutschen Zahlensprechweise schrieb: „In der deutschen Art des ‚Umklammerns‘ äußert sich eine Zusammenfassung des Ganzen, die dem Einzelnen die Selbständigkeit zugunsten des Ganzen nimmt. … die einzelnen Teile sind nur Glieder der Gesamtheit“. Der Sprachwissenschaftler Georg Schuppener kommentiert zu Niederstenbruch 1942: „Die Argumentation kann insgesamt als höchst fragwürdig und wenig plausibel bezeichnet werden. Sie erscheint durchdrungen von der kollektivistischen Ideologie der NS-Zeit“ (Schuppener 2014, S. 74). Auch in der DDR gab es keine Anstrengungen, das Stellenwertsystem zu missbrauchen. 1952 gab es in der DDR Ansätze, die Zahlensprechweise in stärkerer Anlehnung an das Stellenwertsystem zu reformieren (Schellenberger 1953). Diese Versuche wurden eingestellt, da man sich in anderen deutschsprachigen Ländern diesem Vorschlag nicht anschließen wollte (Gerritzen 2008, S. 47). Zur Problematik der verdrehten deutschen Zahlensprechweise berichten wir ausführlicher in Abschnitt 4 (Unzureichende Umsetzung und Risikofaktoren für die Erhaltung der Kulturform).

Das Stellenwertsystem wurde in Deutschland eingeführt, ohne eine Reform der Zahlensprechweise, wobei vermutlich das mit vielen Auflagen (ca. 130) weit verbreitete Lehrbuch von Adam Ries auch eine Rolle spielte (Hergenhahn 2008). Im Einleitungskapitel „Numerirn“ (Ries 1522, S. Aij) führt Ries die indo-arabische Zahlendarstellung ein und beginnt stellenwertgerecht mit einer Sprechweise von links nach rechts, also unverdreht: die Ziffernzahl 7895 wird in Wortform als „siebentausendachthundertneunzehenfünfeins“ dargestellt (Ries spricht "zehen" statt "zehn"). Aber im Wesentlichen verwendet der Rechenmeister in seinem Buch die traditionelle Zahlensprechweise. Direkt nach dem genannten Beispiel führt er diese verdrehte Sprechweise ein. Da die Verdrehregeln kompliziert sind, versieht Ries die Zifferndarstellung mit zusätzlichen Punkten, um die Drehungen anzuzeigen: auf jede 4. Ziffer ein Punkt, wobei die Ziffer unter dem Punkt als jeweils neue Startziffer mitgezählt wird, d.h. in 25178 wird die 5 gepunktet. Nach Ries wird das bindende „und“ stets mitgesprochen: „funff und zwenzig tausent ein hundert und acht und siebenzig“.

Jakob Köbel aus Oppenheim veröffentlichte ebenfalls Bücher, in denen er die indo-arabischen Ziffernzahlen einführte (siehe Abbildung 6 im Abbildungsanhang) und angab, wie man die Zahlen aussprechen soll („Wie die Zeifferzal zu schreiben und zu lesen sey“, Köbel 1517, S. 22). Einige Beispiele aus einer Tabelle (Köbel 1520): 24 Zwenzigvyer, 25 Zwenzigfünff, 33 Dreyssigdrey, 36 Dryessigsechs, 37 Dreyssigsyben, 38 Dreyssigacht, 49 Vyerzigneün, 51 Fünffzigeins, 52 Fünffzigzwey. Köbel propagierte diese unverdrehten Zahlwörter (ohne ein bindendes „und“) für die indo-arabische Darstellung der Zahlen von 21 bis 99 nachweislich seit mindestens 1517 und veröffentlichte wiederholt solche tabellarischen Darstellungen in seinen Büchern, allerdings akzeptierte Köbel bei den höheren Stellenwerten inkonsequent Drehungen (Köbel 1522, S. 9, 13f). „Köbel hält unverändert in all seinen Auflagen, auch in denen, die ab 1531 von Christian Egenolff in Frankfurt am Main gedruckt wurden, an seiner Betrachtungsweise fest“ (Hergenhahn 2008, S. 111). Köbel war offiziell Stadtschreiber von Oppenheim, faktisch über lange Zeit der Leiter der Stadtverwaltung. Martin Luther übernachtete 1521 in Oppenheim, auf seinem Weg zum Reichstag in Worms. Köbel soll dem Reformator angeboten haben, ihn auf einer Burg in der Umgebung sicher unterzubringen, falls Luther auf dem Reichstag in Acht und Bann geschlagen werden sollte. Wäre nicht die Wartburg Luthers Versteck geworden, sondern hätte er den Vorschlag Köbels angenommen, so darf man spekulieren, dass Köbels reformierte Zahlensprechweise vielleicht auch in Luthers Bibelübersetzung Einzug genommen hätte. So aber befleißigte sich Luther „dem Volk aufs Maul zu schauen“ und etablierte die verdrehte Sprechweise nachhaltig im Schriftdeutsch (vgl. hierzu Gerritzen 2008, S. 24, S. 109-112; Goethe-Institut 2017).

Bis heute steht zur Umsetzung des Stellenwertsystems eine Reform der verdrehten Zahlensprechweise im Deutschen aus. Dies erschwert nachweislich das Erlernen des Positionssystems und den Umgang mit Zahlen (Meyerhöfer 2015; Gaidoschik 2015, Morfeld & Summer 2024). Es bestehen aktuelle Diskussionen und Reformbemühungen (vgl. Abschnitte 4, 5.3 und 5.4).

4. Unzureichende Umsetzung und Risikofaktoren für die Erhaltung der Kulturform

Das Risiko eines Verlustes des Stellenwertsystems ist äußerst gering, da dies für jede moderne Gesellschaft einen schwerwiegenden wirtschaftlichen Einbruch darstellen würde, denn Digitalisierung und Computertechnik beruhen auf diesem System (vgl. Abschnitt 2). Die Kulturform *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* erfüllt damit eine bedeutende Rolle für den gesellschaftlichen Zusammenhalt. Diese Kulturform verdient eine entsprechende Wertschätzung, denn sie gehört zweifellos zu den großartigsten Errungenschaften der Menschheit (Barrow 2005, S. 148).

Dennoch ist in der deutschen Bevölkerung das Wissen nicht weit verbreitet, wie das Ziffernrechnen im Stellenwertsystem zu uns gekommen ist. „Wir … werden uns der großartigen Systematik … und der gewaltigen Geistesleistung, die dieses System geschaffen hat, überhaupt nicht bewußt“ (Schellenberger 1953, S. 47). Es besteht zwar kein Verlustrisiko für dies immaterielle Erbe, aber es fehlt ein wesentlicher Teil zum kulturellen Verständnis dieses Erbes in weiten Teilen der Gesellschaft.

Gegenwärtig besteht auch deshalb kein Risiko für einen Verlust von Zahldarstellungen mit indo-arabischen Ziffern und den damit verbundenen Rechentechniken, da diese täglich fast überall auf der Erde verwendet werden. Es gibt zwar Zahlenanalphabetismus sowie das Phänomen, dass selbst einfachste Rechnungen nicht im Kopf, sondern per Taschenrechner oder Smartphone ausgeführt werden, doch bedeutet dies keine ernsthafte Bedrohung schriftlicher Rechenfertigkeit.

Der zunehmende Einsatz von Computern, auch in der Schule, verlangt aber einen fehlerfreien Einsatz des Stellenwertsystems. Inverses Schreiben, wie es durch die deutsche Zahlensprechweise, zum Beispiel ein-und-zwanzig statt zwanzig-eins, leider nahegelegt wird, führt zu Fehlern. „Wenn Kinder Zahlen invers aussprechen, ist es nicht zwangsläufig ein Zeichen von `Zahlen-Legasthenie', wie man früher behauptete, sondern es ist ganz im Gegenteil ein Hinweis darauf, dass ein Kind die Leserichtung schon richtig erkannt hat und dieses Wissen auf das Lesen einer Zahl überträgt“ (Summer 2023, S. 16).

Fromme und Schulz stellen ihre Untersuchungen zum Umfang des inversen Schreibens vor: „Insgesamt schreiben zwei Drittel der interviewten Kinder (n=114) wenigstens eine diktierte Zahl invers (die Anzahl der Einer wird rechts notiert, dann links daneben die Anzahl der Zehner – also entgegen der üblichen Schreibrichtung); ein Drittel aller Kinder schreibt mindestens die Hälfte der diktierten Zahlen invers“ (Fromme und Schulz 2018, S. 570, 571). Zu Details siehe auch Schulz 2016. Die Autoren schließen mit einer zentralen Folgerung: „Um zu verhindern, dass die Zahlwortbildung im Deutschen einen negativen Einfluss auf das Verstehen von Zahlen haben kann, empfiehlt sich die explizite Thematisierung und Bewusstmachung der Unregelmäßigkeiten der Zahlwortbildung“ (Fromme und Schulz 2018, S. 572). Schipper et al. (2022, S. 7) warnen in ihrem Handbuch für den Mathematikunterricht im 2. Schuljahr, dass „eine inverse Zahlschreibweise und Zahlendreher die Entwicklung eines tragfähigen Stellenwertverständnisses verhindern können“ und beschreiben die Inversion als schwierigste Hürde im Aufbau eines Zahlverständnisses und als offensichtlichen Indikator für fehlendes Stellenwertverständnis (S. 49f).

Die Problematik ist also nicht auf das Phänomen des inversen Schreibens beschränkt, sondern betrifft allgemeiner das Verstehen des Stellenwertsystems und die Entwicklung eines gefestigten Zahlbegriffs, denn „… das Denken mit Zahlbegriffen [wird] durch die Verwendung konventioneller Zahlwörter konditioniert“ (Haarmann 2008, S. 37). Diese Konditionierung verfestigt den „Widerspruch zwischen der akustischen und der logisch entwickelten Vorstellung des Zahlenbildes“, und dieser Widerstreit irritiert Schulkinder permanent, „weil stets zwei entgegengesetzt gerichtete Zahlvorstellungen hervorgerufen werden“ (Schellenberger 1953, S. 58).

Eine Reform der traditionell-verdrehten Zahlensprechweise, wie in Norwegen in den 1950er Jahren realisiert, könnte zur besseren Verinnerlichung des Stellenwertsystems im deutschen Sprachraum beitragen (Gerritzen 2008, S. 95 - 104). „Wir übertragen die Vorteile des dekadischen Systems auf das gesamte Rechnen und setzen im Kopfrechnen die logische Übung an die Stelle des Gedächtnistrainings“ (Schellenberger 1953, S. 59). Die Initiative Zwanzigeins e.V. unterstützt eine solche Reform und hat ein Positionspapier entwickelt, indem eine stellenwertgerechte Sprechweise vorgeschlagen wird, die kollisionsfrei neben der üblichen verdrehten Sprechweise verwendet werden kann (siehe Zwanzigeins e.V. 2024a).

Meyerhöfer (2015) diskutiert die angesprochenen Probleme aus einer strukturellen sowie pädagogischen Perspektive und bewertet die herkömmliche verdrehte Sprechweise wie folgt: „Man kann es so sagen: Die Zahlbenennung im Deutschen (und Englischen) torpediert eine strukturierte Zahlauffassung.“ Seine Kritik betrifft also ebenfalls das englische System mit seinen Drehern bis zur Zahl 19.

Der österreichische Mathematik-Didaktiker Gaidoschik (2015) bemängelt in Abschnitt 4 mit dem Titel "Warum Notation und Sprechweise in einem Lernschritt?" die fehlende didaktische Aufarbeitung des Problems der verdrehten deutschen Zahlensprechweise und stellt dies anhand von Schulbüchern dar: „Denn auf derselben Schulbuchseite (und sie ist typisch für aktuelle Schulbücher und entspricht vermutlich auch verbreiteter Unterrichtspraxis) wird in eine Lerneinheit gepackt, was drei durch stoffdidaktische Analyse isolierbare, sachlogisch aufeinander aufbauende Lerninhalte ausmacht:

● Zehner als Bündelung von zehn Einern und zweistellige Zahlen als Zusammensetzungen aus Zehnern und Einern verstehen (Bündelungsprinzip);

● verstehen, dass die Anzahlen von Zehnern und Einern mit denselben Zeichen (Ziffern) festgehalten werden; dass außerhalb einer Stellentabelle nur die Position des Zeichens anzeigt, ob Zehner oder Einer damit bezeichnet werden; dabei zur Kenntnis nehmen und sich früher oder später merken, dass Zehner links von den Einern notiert werden (Positionsprinzip);

● schließlich: die Idiotien der Zahlwortbildung in der deutschen Sprache durchschauen.“

Gaidoschik (2021, S. 171) ergänzt: „Die Grundregel, die es bei aller Unregelmäßigkeit der deutschen Zahlensprechweise dann ja doch gibt: „-zig“ kennzeichnet (üblicherweise!) die Zehnerstelle; „43“ sollte also eigentlich „vierzig-drei“ oder auch „vierzig und drei“ heißen“ und spricht in diesem Zusammenhang sogar „von der Dummheit der deutschen Sprache beim Sprechen zweistelliger Zahlen“ (S. 172).

Die Zahleninversion stellt eine besondere Herausforderung für Kinder mit Rechenschwierigkeiten dar (Gaidoschik 2022, S. 169f). Fuchs et al. 2014 betonen die große Herausforderung für Kinder mit anderer Familiensprache als Deutsch (S. 7).

Bellos (2020, S. 64f) merkt in seinem Bestseller „Alex's Adventures in Numberland“ an: „In almost all Western European languages, number words do not follow a regular pattern. In English we say … eleven, twelve, thirteen. Eleven and twelve are unique constructions, and even though thirteen is a combination of three and ten, the three part comes before the ten part – unlike twenty-three, when the three part comes after the twenty part. Between ten and twenty, English is a mess … German is even more irregular than English. … three hundred and forty-five is dreihundertfünfundvierzig … which lists the numbers in the higgledy-piggledy form of 3-5-4. Such is the level of concern in Germany that this makes numbers more confusing than they have to be, that a campaign group Zwanzigeins (Twenty-one) has been set up to push for a change to a more regular system.“

Und Gaidoschik (2015) kommentiert zu Zwanzigeins e.V. (2024a):

"Solange der Verein keinen Erfolg hat, liegt hier eine Herausforderung für die deutschsprachige Fachdidaktik: Designs für einen Unterricht zu entwickeln und zu evaluieren, die Kinder bestmöglich dabei unterstützt, diese sprachbedingte Hürde zu überwinden. Und das sollte wohl früh geschehen, weil nachvollziehbar ist, dass Unsicherheiten bezüglich der Sprech- und Schreibweise sich negativ auch auf die Entwicklung von Rechenstrategien, die Einstellung zur Grundschulmathematik insgesamt auswirken".

„In diesem Punkt habe ich mich über die neu bearbeiteten Begleitbände zur aktuellen Auflage des Schulbuchs 'Zahlenbuch' gefreut. Im Begleitband zu 'Zahlenbuch 1' halten die Autoren fest:

An dieser Stelle [der ersten Erarbeitung des Bündelungsprinzips, Anm. M.G.] sind die Sprechweisen noch nicht so wichtig wie später. Wichtig ist hier die klare Unterscheidung von Zehnern und Einern, die durch die Stellentafel nahegelegt wird. … Sprechweisen wie 'vierzigunddrei' statt 'dreiundvierzig' sind völlig akzeptabel, nicht nur hier, sondern auch im späteren Unterricht. Sie sind durch das Vertauschungsgesetz gedeckt. (Wittmann u. Müller 2012a, S. 40)

Im Begleitband zu Zahlenbuch 2 wird das noch einmal bekräftigt (vgl. Wittmann u. Müller 2012c, S. 22). Ich plädiere aber dafür, diesen Gedanken weit offensiver zu vertreten. Sprechweisen wie 'vierzigunddrei', zuvor und vor allem aber 'vier Zehner (und) drei Einer', halte ich nicht nur für 'völlig akzeptabel', sondern in der Phase der Erarbeitung grundlegender Einsichten zum Dezimalsystem aus den genannten Gründen für didaktisch empfehlenswert.“

Es ist für Unterrichtende also wesentlich, Kenntnis über diese Problemfelder zu besitzen und mögliche Schwierigkeiten im Aufbau eines gefestigten Zahlverständnisses vorab zu entschärfen (Schipper et al. 2015, S. 14).

Das Kinderbuch der Mathematik-Didaktikerin Summer arbeitet die Verdrehung von Einer und Zehner auf kindgerecht-emotionale Weise in einer Erzählung auf (Summer 2019), in der Einer, Zehner, Hunderter und Tausender als Personen auftreten, die ihren unterschiedlichen "Wert" und ihre "Rangfolge" stets offen darstellen, worunter der Einer als Kleinster leidet und traurig ist. Der Zehner hat Mitleid und lässt daraufhin dem Einer bei der Sprechweise den Vortritt, damit dieser nicht immer der Letzte sein muss.

Eckstein geht deutlich weiter und möchte mit seinem Buch anregen, deutsche Zahlwörter im Mathematikunterricht systematisch zu behandeln. Es geht ihm darum, dass Stellenwerte sicher erkannt und Zahlendreher vermieden werden. Der Autor stellt eine stellenwertgerechte Sprechweise für die Schule vor, erläutert ihre didaktische Funktion, erklärt Hintergründe und entwirft eine pädagogische Umsetzung (Eckstein 2020).

5. Gemeinschaften und Gruppen sowie Art ihrer Beteiligung an der Kulturform

5.1 Heutige Praxis

Stellenwertsystem und Ziffernrechnen durchdringen unsere Alltagswelt. Es besteht eine lebendige kulturelle Praxis: Notieren, Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren von Zahlen ereignen sich unablässig – nicht nur in schriftlicher Form und im Dezimalsystem. Man sollte sich bewusst machen, dass große Zahlen in Systemen, die keine Stellenwertdarstellung kennen, gar nicht oder nur in sehr schwerfälliger Weise erfasst werden können: Wie kann man eine Zahl wie 2^{100} mit römischen Ziffern ausdrücken? In den Naturwissenschaften werden Naturkonstanten verwendet, die sehr klein sind. Die Ladung eines Elektrons wird als $1{,}602*10^{-19}$ C angegeben (Wikipedia 2024e). Mit solchen Größen kann man im Stellenwertsystem gut rechnen, aber im römischen System ist dies praktisch ausgeschlossen. Höhere Physik ist ohne Stellenwertsystem unmöglich.

Betrachten wir das moderne Börsenwesen (Wikipedia 2024a). Die Aktienkurse werden in ständig veränderter Folge notiert, was voraussetzt, dass die nötigen Daten mit Hilfe von Computern und Algorithmen schnell ermittelt werden, was ohne Stellenwertsystem nicht realisierbar wäre. Börsen können ohne Stellenwertsystem nicht betrieben werden. Ähnliches gilt für viele andere Aktivitäten und Prozesse, insbesondere in der Industrie (Wikipedia 2024g).

Die Basis des digitalen Computers ist die effektive Verrechnung von Zahlen im Stellenwertsystem (von Neumann 2000). Logische Operationen werden als Algorithmen auf Basis der Binärzahlen dargestellt (Boolesche Algebra) (Steimann 2018). Die Kodierung und Verarbeitung von Texten, Musik, Bildern und Filmen in Smartphones und Tablets findet in dieser Form statt. Ohne Stellenwertsystem ist Internet unmöglich. Das Positionssystem ist auch die Grundlage weitergehender Entwicklungen, wie Computeralgebra und Künstlicher Intelligenz (Breger 2009; Steimann 2018; Wikipedia 2024b; Wikipedia 2024h).

5.2 Weitergabe von Wissen und Können

Der Kreis der Personen, die an der Vermittlung von *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* mitwirken, ist außerordentlich vielfältig. Der Kreis ist überzeugt von der Bedeutung des Positionssystems für die Bildung und betreibt aktiv Erhaltungs- und Weitergabemaßnahmen. Eltern können Zahlwörter oder elementare Verfahren vermitteln, aber auch ältere Geschwister, sofern sie dazu ermutigt werden. In den Kitas und Kindergärten finden ebenfalls solche Vermittlungen statt. In Elternhäusern, in denen nicht Deutsch gesprochen wird, ist es schwieriger, aber dennoch sinnvoll, die Zahlwörter in der Erstsprache zu üben und später die ggf. deutlich abweichende deutsche Sprechweise zu übernehmen.

In Deutschland wird das Stellenwertsystem an allen Schulformen unterrichtet. Wir verweisen beispielhaft auf Lehrpläne aus Nordrhein-Westfalen für das Fach Mathematik, in denen *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* als Lehr- und Lerninhalte explizit vorgegeben werden: Grundschule (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen 2008), Hauptschule (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen 2011), Realschule (Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen 2004a), und Gesamtschule (Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen 2004b).

Lehrpersonen werden an Universitäten und pädagogischen Hochschulen ausgebildet (Kultusministerkonferenz 2019, z.B. in NRW: LABG 2009). Zuständige Fachgesellschaften, wie die Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV, https://dmv.mathematik.de/), die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM, http://didaktik-der-mathematik.de/) und der Verband zur Förderung des MINT-Unterrichts (MNU, http://www.mnu.de) listen in einer gemeinsamen Stellungnahme Kompetenzerwartungen für die Studierenden. Im Bereich „Zahlen, Zahldarstellungen, Zahlensystem“ geht es nicht nur um das technische Verständnis des Stellenwertsystems. Ebenso gilt als Ziel: die Studierenden „ermessen die kulturelle Leistung, die in der Entwicklung des Zahlbegriffs und des dezimalen Stellenwertsystems steckt“ (DMV-GDM-MNU 2008).

Die für unsere Gesellschaft wesentliche Kulturform *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* wird durch diese Maßnahmen nachhaltig für die Zukunft gesichert. Dadurch betätigen sich die genannten Gruppen als Träger dieser Kulturform. Seng (2017) beschreibt dies u.a. als ein Charakteristikum des immateriellen Kulturerbes: „Ein Komplex identitätssichernden Wissens wird … möglichst abwandlungsfrei reproduziert“.

5.3 Eingebundene Gemeinschaften, Gruppen und Einzelpersonen

Es existiert eine lebendige Trägerschaft, die daran mitwirkt, dass das Stellenwertsystem verbreitet und angenommen wird. Die manchmal geäußerte Vorstellung, dass keine aktive Trägerschaft dieser Kulturform in Deutschland erkennbar sei, ist dadurch widerlegt, dass das Stellenwertsystem mit seinen alltäglichen Anwendungen in der Gesellschaft breit eingeführt ist. Solche Entwicklungen laufen nicht von selbst ab: Eine aktive Pflege mit vielfältigen Erhaltungsanstrengungen ist unverzichtbar, was sogar den Einsatz kompetenter Lehrpersonen erfordert (vgl. Abschnitt 5.2). Ähnliches gilt für alle modernen Gesellschaften.

Kulturerbeträger sind daher alle Menschen, die das Stellenwertsystem mit den indo-arabischen Ziffern benutzen und weitergeben, insbesondere alle Lehrpersonen des Faches Mathematik. Der Verein Zwanzigeins e.V. übernimmt darüber hinaus eine klar identifizierbare und aktive Trägerschaft in den deutschsprachigen Ländern (Zwanzigeins e.V. 2024a).

Ziel des Vereins ist die möglichst vollständige Umsetzung des Stellenwertsystems, auch in seiner sprachlichen Darstellung (vgl. Abschnitte 3.3, 4, 5.4). Anders als zum Beispiel in den romanischen Sprachen, im Englischen, im Russischem, im Türkischen oder im Chinesischem, wird im Deutschen die Zahl 123 nicht als „hundert-zwanzig-drei“ sondern verdreht als „hundert-drei-und-zwanzig“ ausgesprochen, was nicht der Logik des Stellenwertsystems entspricht, d.h. der geordneten Zahlenabfolge Hunderter-Zehner-Einer. Die stellenwertgerechte Zahlensprechweise, d.h. von links nach rechts, also so wie wir Texte schreiben und lesen, möchte der Verein populär und gesellschaftsfähig machen. Psychologen haben sich mit diesem Thema bereits befasst und Nachteile der traditionellen Sprechweise klar erwiesen und dokumentiert [siehe die Zusammenstellung gesicherter neuro- und entwicklungspsychologischer Erkenntnisse zur Auswirkung der deutschen und niederländischen (Zwanzigeins e.V. 2024b) aber auch der englischen Zahlensprechweise (Zwanzigeins e.V. 2024c)]. Der Verein führte mit Hilfe der Zwanzigeins-App (https://zwanzigeins.jetzt/app/index.html) eine experimentelle Studie („randomized controlled panel study with cross-over“) an 55 Kindern des zweiten Schuljahres in drei Schulklassen aus zwei Schulen in Österreich durch (Schmid 2023). Die Ergebnisse zeigen einen deutlichen Vorteil der stellenwertgerechten Sprechweise. So sank die mittlere Dauer bis zur korrekten Eingabe von 10 diktierten Zahlen von 11 bis 99 von 62 s bei traditionell-verdrehter Sprechweise auf 51 s bei unverdrehter Sprechweise, und die durchschnittliche Fehlerzahl pro Durchgang verringerte sich von 2,6 auf 0,6 Fehler. Der Anteil fehlerfreier Durchgänge (fehlerfrei = alle 10 Zahlen eines Durchgangs ohne Fehler eingegeben) steigt von 22% aller Durchgänge bei traditionell-verdrehter Sprechweise auf 71% aller Durchgänge bei stellenwertgerechter Sprechweise. Jeder berichtete Unterschied ist statistisch hochsignifikant (stets $p < 0{,}001$).

Zwanzigeins e.V. fordert, dass es ein wesentlicher Bestandteil des Mathematikunterrichts sein muss, die Zahleninversion in der deutschen Sprache und die dadurch bedingten Schwierigkeiten zu thematisieren, wie es der aktuelle österreichische Lehrplan vorgibt (Bundeskanzleramt 2023, S. 73), und allen Schulkindern die Möglichkeit zu geben, die unverdrehte Zahlensprechweise kennenzulernen und auszuprobieren.

Auf der Mitgliederversammlung am 26.11.2016 wurde beschlossen, dass der Verein Zwanzigeins e.V. eine Bewerbung für das Bundesweite Verzeichnis (Deutsche UNESCO-Kommission 2024f) unterstützt, und das Stellenwertsystem als ein immaterielles Kulturerbe anerkennen zu lassen. Ein Projekt Immaterielles Kulturerbe wurde aufgesetzt (Zwanzigeins e.V. 2024d) und eine Arbeitsgruppe unter Leitung von Prof. Dr. Gerritzen gegründet, um diese Initiative umzusetzen (Zwanzigeins e.V. 2024e). Der Verein bildet somit eine spezifische Trägergemeinschaft des Kulturerbes.

Die Bewerbung wurde aktiv unterstützt durch Gutachten von Prof. Dr. Menso Folkerts, Professor für Geschichte der Naturwissenschaften (Forschungsschwerpunkt: Geschichte der Mathematik), Ludwig-Maximilians-Universität, München und Prof. Dr. Paul Kunitzsch, Professor für Arabistik, Institut für den Nahen und Mittleren Osten, Ludwig-Maximilians-Universität, München.

Die Vorstände der wichtigen Fachgesellschaften DMV und GDM wurden über diese Initiative des Vereins Zwanzigeins e.V. informiert. Anschließend wurde zu in der DMV organisierten, universitären Vertretern des Faches Geschichte der Mathematik Kontakt aufgenommen (Prof. Dr. Knobloch, TU Berlin; Prof. Reich, Hochschule Karlsruhe), die die Initiative befürworteten. Mathematikdidaktische Einrichtungen (Arithmeum in Bonn, www.arithmeum.uni-bonn.de; Mathematikum in

Gießen, https://www.mathematikum.de/), wurden informiert, sowie der Adam-Ries-Bund (www.adam-ries-bund.de) und das Deutsche Museum (www.deutsches-museum.de) in München. Prof. Dr. Trischler (Museumsleitung Bereich Forschung) schrieb, dass „wir Ihre Einschätzung, dass das Wissen über die Herkunft und Ausbreitung sowie v.a. auch die Bedeutung des Stellenwertsystems und Ziffernrechnens in der Öffentlichkeit zu wenig entwickelt und verbreitet ist, völlig teilen. Die Anerkennung der Wissensform Stellenwertsystem als Immaterielles Kulturerbe der UNESCO könnte dies nachhaltig ändern und v.a. auch das Wissen über die Prozesse des Transfers mathematischen Wissens vom indo-arabischen in den europäischen Kulturraum befördern“.

Zudem wurde dem Bundesvorstand des MNU die Initiative erläutert. Mit NRW-Fachvertretern des MNU wurden weitergehende Diskussionen geführt. Diese Fachvertreter unterstützen die Initiative.

5.4 Zugang und Beteiligung an der Kulturform

Das Stellenwertsystem ist frei zugänglich und gehört zur Allgemeinbildung. Wegen seiner kulturellen Bedeutung wird es in Schulen gelehrt, um so eine Teilhabe aller zu ermöglichen.

„Der gewaltige Fortschritt, den die Einführung der dekadischen Schreibweise der Zahlen gebracht hatte, bestand 1. in der logisch sauber entwickelten, übersichtlichen und klar gegliederten Schreibweise der Zahlen und 2. in der Reduktion aller schriftlichen Rechenoperationen auf die Arbeit mit den Ziffern 1 bis 9. Wir addieren und subtrahieren schriftlich stets die einstelligen Werte der gleichen Stelle; beim Multiplizieren arbeiten wir immer mit den wenigen Aufgaben des kleinen Einmaleins. Wir führen auch die Division durch mehrstellige Zahlen auf das kleine Einmaleins zurück, indem wir das zuerst geschätzte Ergebnis jeder Division durch die Multiplikation mit dem Divisor auf die Richtigkeit kontrollieren und (bei richtiger Schätzung) anschließend die Subtraktion vornehmen. Diese beiden Leistungen haben alle Rechenoperationen so unendlich vereinfacht, daß heute jedes 14jährige Schulkind ohne besondere Anstrengung alle die Rechenaufgaben zu lösen vermag, für die noch bis ins 16. Jh. besondere Rechenmeister nötig waren“ (Schellenberger 1953, S. 65).

„Die Entdeckung des Positionssystems hat alle Hindernisse hinweggefegt und die Arithmetik selbst dem stumpfesten Geist zugänglich gemacht.“ (Dantzig 2007; Übersetzung des zitierten Satzes nach Ifrah 1991, S. 480). Inklusion und Partizipation sind wichtige Aspekte dieser gesellschaftlich organisierten Traditionspflege.

Die indo-arabischen Zahlen werden in Deutschland bereits mit der Muttersprache im Elternhaus vermittelt, zudem im Kindergarten, in der Grundschule, im Alltag (Preise, Uhrzeiten, Kalender, TV, Printmedien, Internet, usw.). Dennoch gibt es auch im deutschsprachigen Raum deutliche Herausforderungen beim Erlernen des Stellenwertsystems und des Ziffernrechnens bis hin zu „besondere(n) Schwierigkeiten beim Mathematiklernen“ (Gaidoschik et al. 2021) und einer diagnostizierten „Rechenstörung“ (Deutsche Gesellschaft für Kinder- und Jugendpsychiatrie, Psychosomatik und Psychotherapie e. V. 2018), weshalb Anstrengungen unternommen werden sollten, existierende Barrieren nach Möglichkeit abzubauen, wie zum Beispiel die verdrehte Sprechweise der Zahlen (vgl. Abschnitte 3.3, 4 und 5.3), auch mit dem Ziel, mehr Bildungsgerechtigkeit zu erreichen (Gerritzen 2008). Das schlechte Abschneiden deutscher Grundschüler in internationalen Vergleichsstudien, könnte mit der verdrehten Zahlensprechweise zusammenhängen (Wendt et al. 2016; Schwippert et al. 2020). Wir verweisen auf die Website des Vereins Zwanzigeins e.V., wo Erläuterungen zum historischen Hintergrund der verdrehten Sprechweise gegeben werden. Die Tragweite des Problems wird dargestellt und Anregungen sowie Vorschläge werden unterbreitet, wie die Situation in den deutschsprachigen Ländern verbessert werden könnte (Zwanzigeins e.V. 2024a).

5.5 Bestehende und geplante Maßnahmen zur Erhaltung und kreativen Weitergabe des Immateriellen Kulturerbes

„Unter ‚Erhaltung' sind Maßnahmen zur Sicherstellung des Fortbestands des immateriellen Kulturerbes zu verstehen, einschließlich … der Weitergabe, insbesondere durch schulische und außerschulische Bildung“ (UNESCO 2003: Artikel 2.3). Das Stellenwertsystem und die von al-Ḫwārizmī entwickelten schriftlichen Rechenverfahren sind im Schulunterricht der ersten Klassen fundamental. In Deutschland wird das Stellenwertsystem an allen Schulformen unterrichtet, wie Mathematik-Lehrpläne belegen. Dieses wichtige Wissen um das Positionssystem und die grundlegende Fertigkeit einer praktischen Zahlenbeherrschung wird seit Jahrhunderten von Generation zu Generation weitergegeben. Es werden soziale und kulturelle Praktiken zur Erhaltung des immateriellen Kulturerbes gepflegt, indem offener, inklusiver und partizipativer Unterricht gestaltet wird (vgl. 5.2). Wir führen beispielhaft die Kompetenzerwartungen des NRW-Schulministeriums an:

- am Ende der 4. Klasse:

Zahlen im Zahlenraum bis 1000000 nach Struktur des Zehnersystems darstellen, d.h. Bündelungsprinzip und Stellenwertschreibweise anwenden (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen 2008)

- am Ende der 6. Klasse:

Darstellen von Zahlen mit Hilfe der Stellenwerttafel (Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen 2004a,b; Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen 2007), mit Hilfe von Ziffern und in Wortform (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen 2007); Dezimalzahlen ordnen, vergleichen und runden; Grundrechenarten mit endlichen Dezimalzahlen ausführen (Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen 2004a,b; Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen 2007, 2011), Umwandlungen zwischen Dezimalzahlen, Prozentzahlen und Brüchen durchführen (Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen 2004a; Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen 2007).

- am Ende der Sekundarstufe I:

Zahlen je nach Situation als Dezimalzahl, Prozentzahl, Bruch oder in Zehnerpotenzschreibweise ordnen, vergleichen, verwenden (Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen 2004a; Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen 2007).

Lehrer werden für die systematische Weitergabe dieses spezifischen Wissens und Könnens gezielt ausgebildet, auch für die Grundschule: „Die universitäre Ausbildung im Lehramt Grundschule in Nordrhein-Westfalen sieht … ein verpflichtendes Studium der Fächer Deutsch/sprachliche Grundbildung und Mathematik/mathematische Grundbildung … vor“ (Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen 2020).

Im Zusammenhang mit der Zahlenwanderung von Indien über Bagdad und die islamische Welt, dann weiter über Spanien in den Mittelmeer-Raum, und von dort nach Mittel- und Nordeuropa und schließlich in die gesamte Welt stellen sich eine Fülle von spannenden Fragen. Wieso dauerte es ca. 300 Jahre bis sich die indo-arabische Ziffernschreibweise von Italien ausgehend im Deutschen und den meisten anderen europäischen Ländern weitgehend durchgesetzt hatte? Woher kamen die Widerstände gegen das neue Zahlensystem? Wieso wurde die Ziffer Null in Europa vor 1500 als Teufelszeug gebrandmarkt? Seit wann waren die neuen Zifferndarstellungen in der islamischen Welt verbreitet? Wie kamen sie zum Beispiel in die heutige koreanische Schrift? Durch geeignete Öffentlichkeitsarbeit könnten Printmedien, Radio, TV, Internet usw. gewonnen werden, über diese fundamentalen Entwicklungen des mathematischen Denkens lebendig zu berichten.

Es wäre wünschenswert und möglich, diesen Fragenkreis geschichtswissenschaftlich zu untersuchen. Forschende mit zum Beispiel Schwerpunkt Mittelalter könnten interessiert werden, Bachelor-, Master- oder Doktorarbeiten zu dieser Thematik auszugeben.

Die Art der didaktischen Behandlung des Ziffernrechnens in deutschen Schulbüchern ist häufig nicht zufriedenstellend. In manchen Darstellungen wird der demotivierende Eindruck erweckt, als wären Ziffern und Algorithmen „vom Himmel gefallen“ und als wäre der Sachverhalt recht banal. Die Tatsache, dass sich ein junger Mensch in Bagdad vor 1200 Jahren diese Erkenntnisse hart erarbeitet hat, sie aufschrieb und durch glückliche Umstände eine lateinische Übersetzung dieses Werkes erhalten blieb (vgl. Abschnitt 3), sollte in Fachkreisen, insbesondere von Lehrkräften, nicht unbeachtet bleiben.

Auch im Schulunterricht sollten einige Kenntnisse über die Personen erworben werden, die hauptsächlich den Wandel der Zahlenpräsentationen herbeigeführt haben. Diese Vorgänge können auch als Paradebeispiel für wichtige Erneuerungen im gesellschaftlichen Raum angesehen werden.

Solches interkulturelle Lernen stiftet „kulturelle Kohärenz“ (Heymann 1996) und unterstützt die Identitätsbildung. Die hier vorgeschlagene Bereicherung des Mathematikunterrichts mit einer historischen Komponente entspricht daher auch Zielvorstellungen der DMV und GDM. In einer gemeinsamen Veröffentlichung wird zu „neuen Ergebnissen zur Geschichte der Mathematik und ihrer Anwendungen [berichtet], die beitragen können, den mathematischen Unterricht in allen Schulstufen zu befruchten“ (Fothe et al. 2014). Ziegler spricht sich explizit für Mathematikgeschichte im Mathematikunterricht aus und sieht darin „eine Gelegenheit, wirkliche Helden zu treffen und Geschichten zu erzählen über Archimedes, Leonhard Euler, Carl Friedrich Gauß, …, die mitbestimmen sollten, worum es in der Mathematik geht“ (Ziegler 2011).

Auch international wird diese Einstellung geteilt. So gibt es gibt innerhalb der HPM (History of Pedagogy in Mathematics Education) eine breite Forschungsgruppe dazu (HPM 2024). Hier findet sich eine Fülle an empirischen Studien und theoretischen Überlegungen zur Bedeutung der Mathematikgeschichte im Unterricht. Einen Überblick zur Rolle der Geschichte der Mathematik in der Mathematischen Ausbildung geben Clark et al. 2019. Ein Themenheft im Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) beleuchtet die Relevanz von Mathematikgeschichte im Mathematikunterricht (Chorlay et al. 2022a). “Conceiving mathematics as a human intellectual activity for the acquisition of knowledge, and the evolutionary character of this knowledge is important for mathematics education, both by supporting the doing, learning and teaching of specific pieces of mathematics and by helping to appreciate the relation of mathematics with other intellectual and cultural pursuits all along its historical development” (Clark et al 2029, S. 2).

Mit einer Bewusstmachung und Wertschätzung von *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* als einem immateriellen Kulturerbe der Menschheit, sollte es leichter sein, das Thema in den Fokus dieser Diskussionen zu stellen. Es könnte die bildungspolitische Forderung aufgestellt werden, dass Mathematik-Didaktiker, Schulministerien und Schulbuchverlage ihren Beitrag zu diesem Thema leisten.

6. Wertschätzung im Vergleich zu anderen mathematischen Errungenschaften

Andere mathematische Erkenntnisse sind ebenfalls weltweit akzeptiert. So betont der folgende Kommentar die Bedeutung von Euklids Buch mit dem Titel „Elemente“, das um 300 v.u.Z. in Alexandria verfasst wurde: „Oft wird gesagt, es sei das am zweithäufigsten gelesene Buch in der menschlichen Geschichte. … Umso verblüffender ist das, wenn man sich klarmacht, dass die einzigen Konkurrenten die Bibel und der Koran sind“ (O‘Shea 2009, S. 82). Der in den „Elementen“ bewiesene Satz des Pythagoras ist global verbreitet, wie das Positionssystem, allerdings ohne ein so vitales, im Lebensalltag verankertes Kulturerbe geworden zu sein wie das dezimale Stellenwertsystem, gemeinsam mit al-Ḫwārizmīs Algorithmen. Barrow hält das Positionssystem für „die erfolgreichste intellektuelle Neuerung, die je auf unserem Planeten gemacht wurde“ (Barrow 2005, S. 148). Insofern besitzt das Stellenwertsystem ein Alleinstellungsmerkmal, auch wenn es um die Frage geht, ob durch die Kulturform ein „Gefühl von Identität und Kontinuität“ vermittelt wird (UNESCO 2003, Artikel 2.1).

Wir möchten an dieser Stelle den Kommentar eines Gutachters zu diesem Manuskript anfügen, da er u.E. gut darstellt, was als eingängige Kritik vorgebracht werden könnte: „Ich befürchte, dass sich die gleiche Argumentationskette auch auf andere Bereiche des gesellschaftlichen Lebens ausdehnen und übertragen ließe (ich bin gerne bereit, eine fast wortgleiche Argumentationsform auf z.B. die katholische Religion, den Fußball oder das Aquarellmalen zu übertragen).“ Wir halten diese Kritik für verfehlt. Denn es gibt moderne Gesellschaften, in denen die katholische Religion weder historisch noch aktuell eine relevante Rolle zukam bzw. zukommt (z.B. Japan und Südkorea) oder in denen Fußball traditionell eine lediglich untergeordnete Sportart darstellt (z.B. die USA). Ähnliches gilt für die Aquarellmalerei, die z.B. vor dem 19. Jahrhundert u.Z. in den USA sicherlich ohne Bedeutung war (Gobel 2024) und bis heute in der gesellschaftlichen Entwicklung der USA nie eine tragende Funktion übernahm. Aber es gibt keine moderne Gesellschaft, die ohne Stellenwertsystem existieren kann. Diese kulturelle Sonderstellung des Stellenwertsystems ist dem Gutachter offenkundig nicht bewusst, was auch als ein exemplarischer Beleg dafür verstanden werden kann, dass in der Schule die kulturelle Komponente von *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* ungenügend vermittelt wird.

Diese Argumentation pro *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* schließt nicht aus, dass z.B. die Aquarellmalerei die UNESCO-Kriterien eines immateriellen Kulturerbes erfüllt, wie sie in Abschnitt 0 dargelegt sind.

7. Bewertung durch die Deutsche UNESCO-Kommission und weitere Gremien

Ein Antrag auf Anerkennung von *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* zur Aufnahme dieses Kulturguts in das Bundesweite Verzeichnis zum Immateriellen Kulturerbe wurde 2017 beim Kultur- und Wissenschaftsministerium des Landes Nordrhein-Westfalen eingereicht.[15]

Auf Empfehlung der Jury für das Immaterielle Kulturerbe hat das Land Nordrhein-Westfalen im Jahr 2018 die Kulturform für das Bundesweite Verzeichnis nominiert. Die unerwartete Ablehnung des Komitees „Immaterielles Kulturerbe“ der Deutschen UNESCO-Kommission und der Kultusministerkonferenz erfolgte am 07.12.2018: „Die Experten würdigen die Entwicklung des Stellenwertsystems. Jedoch handelt es sich bei dem Vorschlag eben um ein System, ein spezifisches Wissen und Können wie auch soziale und kulturelle Praktiken im Sinne der UNESCO-Konvention zur Erhaltung des Immateriellen Kulturerbes sind nicht erkennbar. Eine klar identifizierbare und aktive Trägerschaft ist nicht auszumachen… Eine Ablehnung in dieser Auswahlrunde bezieht sich nicht auf die Kulturform an sich und schließt eine erneute Bewerbung in der Zukunft nicht aus“ (DUK_KMK_07.12.2018.pdf auf Zwanzigeins e.V. 2024f). Der Antragstext wurde daraufhin nachgebessert, zum Beispiel wurden die sozialen und kulturellen Praktiken im Schulunterricht sowie die Trägergruppen beschrieben, und der Antrag wurde 2019 erneut eingereicht (Zwanzigeins e.V. 2024g).

Eine Ablehnung erfolgte diesmal bereits durch die Landesjury für das Immaterielle Kulturerbe in Nordrhein-Westfalen. Als Ablehnungsgrund wurde wiederum das Fehlen einer „spezifischen Trägergruppe“ angeführt und eine Nominierung für das Bundesweite Verzeichnis für 2020 als „aussichtslos“ eingeschätzt, aber „eine erneute Bewerbung in der Zukunft nicht ausgeschlossen“ (Ministerium Kultur Wissenschaft NRW_16.04.2020 auf Zwanzigeins e.V. 2024g).

Es bleibt unklar, warum sich ein besonderes Problem mit der spezifischen Trägerschaft ergibt, das so bei anderen, jedoch anerkannten Kulturformen nicht auftreten soll: Was ist zum Beispiel die spezifische Trägerschaft der Reggae-Musik oder des Märchenerzählens? Und warum sollte es den Trägergruppen dieser anerkannten Kulturformen gelingen, „die Aufmerksamkeit der Öffentlichkeit stärker auf diese kulturschaffende Technik zu lenken“ (Ministerium Kultur Wissenschaft NRW_16.04.2020 auf Zwanzigeins e.V. 2024g), aber nicht den in Abschnitt 5 angeführten Trägergruppen von *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* nach einer offiziellen Anerkennung dieser Kulturform als ein immaterielles Kulturerbe?

8. *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* als globales immaterielles Kulturgut der Menschheit - ein eigener Unterrichtsgegenstand im Mathematikunterricht?

Das dezimale Stellenwertsystem (Positionsprinzip mit reeller Basis 10), ausgeführt in indo-arabischen Ziffern (abstrakte Zeichen, losgelöst von Schriftzeichen) sowie das Wissen um seine Bedeutung (Darstellung aller Zahlen mit wenigen Grundzeichen) und die damit verbundenen Fertigkeiten (schriftliche Verarbeitung von Zahlen mit nachprüfbaren Rechenschritten = Ziffernrechnen) sind ein wesentliches Kulturgut der Menschheit. Dies Kulturgut wurde in einem langen Prozess hart erarbeitet und wird bis heute von einer Generation zur nächsten weitergereicht. In Schulen werden das System und seine Anwendung (Rechenfertigkeiten) gelehrt und erlernt; dies sichert Identität und Kontinuität in einem Kernbereich moderner Gesellschaften. Die Kulturform ist nicht abgeschlossen oder statisch, denn Weiterentwicklungen (zum Beispiel Algorithmen, Computertechnik, erweiterte Zahlbegriffe) führten zur Digitalisierung aller Lebensbereiche und stoßen immer noch Forschungsarbeiten in der Mathematik an.

Eine herausragende menschliche Kreativität war notwendig, um dieses Kulturgut zu erarbeiten. Das dezimale Positionssystem entstand spätestens um 500 u.Z. in Indien und kam über die arabische Welt nach Europa. Das System ist heute global verbreitet; es ist in alle modernen Kulturen eingezogen und dort ein unverzichtbarer Bestandteil der kulturellen Grundausstattung geworden.

Die Kulturform *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* erfüllt alle Kriterien eines immateriellen Kulturerbes in Deutschland, vgl. Abschnitt 0, Punkte a) – c). Über den nationalen Rahmen hinausgehend ist zudem eine globale Würdigung angezeigt. Die Kulturform *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* sollte deshalb als ein immaterielles Kulturerbe der Menschheit (siehe zu diesem Begriff den Abschnitt 0) verstanden und eingeordnet werden.

Das Wissen über Bedeutung, Herkunft und Ausbreitung von *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* ist ungenügend in der Öffentlichkeit entwickelt. Die Erarbeitung des Systems im indo-arabischen Raum sowie die Schwierigkeiten bei seiner nachhaltigen Einführung werden kaum realisiert (ein Beispiel: RedaktionsNetzwerk Deutschland 2019). „Die Marginalisierung der Leistungen früherer Kulturen … sind wohlbekannte Erscheinungen der Geschichte“ (Haarmann 2008, S. 98). Entsprechend beschreibt Seng (2017) das übergreifende Ziel für eine Beschäftigung mit einem immateriellen Kulturerbe wie folgt: die „Auseinandersetzung mit dem immateriellen Kulturerbe unserer Gesellschaft könnte … zu einer umfassenden Diskussion und Verständigung über Kultur, deren Formen und Äußerungen und damit dem Bindeglied unseres Gemeinwesens führen".

Stellenwertsystem und Ziffernrechnen bilden ein übergreifendes Kulturgut östlicher und westlicher Zivilisationen. Ein solches gemeinsam gelebtes Kulturerbe kann identitätsstiftend wirken und mithelfen, Grenzen zwischen verschiedenen Kulturkreisen zu überwinden, insbesondere angesichts des derzeitigen Spannungsfeldes zwischen europäischer und arabischer Kultur und Lebensform (Bakr et al. 2003). Dies ist auch eine gewünschte Funktion einer übergreifenden Kulturform: die UNESCO betont die „Bedeutung des immateriellen Kulturerbes als Mittel zur Förderung von Annäherung, Austausch und Verständnis zwischen den Menschen" (UNESCO 2003) sowie als Mittel zur „Förderung der internationalen Zusammenarbeit" (Deutsche UNESCO-Kommission 2024g).

Dies Kulturgut ist keine Selbstverständlichkeit, obwohl es in Schulen gelehrt wird. Unsere Erörterung, welche Faktoren die Weitergabe, Praxis und Anwendung der Kulturform *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* behindern oder gefährden könnten (Kapitel 4), thematisiert die verdrehte deutsche Zahlensprechweise als eine Lernbarriere und betont die Bemühungen des Vereins Zwanzigeins e.V. um Verbesserungen (Zwanzigeins e.V. 2024a).

Wir haben mit diesem Beitrag dargelegt, dass die Kulturform *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* die Kriterien eines immateriellen Kulturerbes der Menschheit im Sinne der UNESCO-Konvention (UNESCO 2003) erfüllt. Die bewusste Wahrnehmung von *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* als einer kulturellen Ausdrucks- und Wissensform stellt einen ersten, wichtigen Schritt dar, um eine der Bedeutung dieses Kulturgutes angemessen erscheinende Wertschätzung zu erreichen.

Wir halten es für wichtig, den überragenden kulturellen Aspekt von *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* auch im Mathematikunterricht herauszustellen, also die kulturelle Komponente dieser Wissensform als einen eigenen Unterrichtsgegenstand in Mathematik zu behandeln. Dies entspricht nicht nur den eingangs dargelegten Forderungen von Ziegler (2011), wonach Mathematik in der Schule als wichtiger Teil unserer Kultur mit langer Geschichte und als Basis von Schlüsseltechnologien vermittelt werden soll, sondern ist auch im Sinne der umfangreichen, internationalen Arbeiten der HPM (History of Pedagogy in Mathematics Education) zur Bedeutung der Mathematikgeschichte im Mathematikunterricht, z.B. Clark et al. 2019 und Chorlay et al. 2022b.

Unterrichtsinhalte, die nicht direkt mit dem Erlernen von Verfahren und dem Erzielen von Noten zusammengehen, können motivationale Relevanz haben. Nach einer repräsentativen Studie für Bayern (Sakaki et al. 2023) sinkt die Motivation im Mathematikunterricht mit zunehmendem Alter der Kinder/Jugendlichen: Um dem entgegenzuwirken, ergab sich als wesentlich, eine emotionale Bindung zum Fach aufzubauen; eine rein extrinsische Motivation, z.B. über Schulnoten, erwies sich als unzureichend. „Geschichte, Anwendungen und Übersicht sind wichtig für die Motivation, als Bildungsziel – für alle" (Ziegler 2011, S. 178). Dies verbindet Mathematikunterricht mit Allgemeinbildung.

Als wichtige Komponenten der Allgemeinbildung gelten Weltorientierung, Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch und kulturelle Kohärenz (Heymann 1996). Der konsequente Bezug auf den Gedanken einer zeitgemäßen Allgemeinbildung kann „dem schulischen Mathematikunterricht neue Konturen geben" (Heymann 1996, S. 279). Die Berücksichtigung der kulturellen Komponente von *Stellenwertsystem und Ziffernrechnen* im Mathematikunterricht stellt ein konkretes Beispiel für diesen Ansatz dar. Wir hoffen mit unserem Beitrag eine entsprechende Diskussion in der Mathematik-Didaktik eröffnen zu können.

9. Fazit

Stellenwertsystem und Ziffernrechnen erfüllt als Kulturform die Kriterien eines immateriellen Kulturerbes der Menschheit. Die wichtige kulturelle Bedeutung dieser Wissensform sollte neben ihren technischen Aspekten im Mathematikunterricht vermittelt werden.

Anmerkungen

[1] Zu einer Übersicht von geeigneten Verfahren und Hilfestellungen, die den arithmetischen Lernprozess und die Entwicklung des Verständnisses für das Stellenwertsystem möglichst gut unterstützen, sei beispielhaft auf die Ausführungen des Förderzentrums Mathematik an der TU Dortmund verwiesen (Hußmann und Nührenbörger 2024). Zur Bedeutung des dezimalen Stellenwertverständnisses zitieren wir Häsel-Weide und Schöttler (2021, S. 14f): „Die empirischen Untersuchungen offenbaren vielfältige Schwierigkeiten im Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems und zeigen, dass einige Schülerinnen und Schüler oftmals über ein nicht adäquates inhaltliches Verständnis von natürlichen Zahlen bzw. von Dezimalbrüchen verfügt. Den betreffenden Lernenden fehlen damit wichtige Kompetenzen, um dem Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I folgen zu können, wodurch ihr mathematischer Lernprozess beeinträchtigt wird. Darüber hinaus ist das Ver-

ständnis des Dezimalsystems ein wichtiger Prädiktor für die Schulleistungen im Fach Mathematik (Fromme, 2017; Moeller et al., 2011; Moser Opitz, 2013; van de Walle et al., 2013). Deswegen ist es wichtig, die Schülerinnen und Schüler gezielt in ihrem dezimalen Stellenwertverständnis zu fördern – sowohl im Bereich der natürlichen Zahlen als auch der Dezimalbrüche."

[2] Die englische Bezeichnung für immaterielles Kulturerbe lautet *intangible cultural heritage* (UNESCO 2024a).

[3] Auf der internationalen UNESCO-Ebene werden sogar drei Listen immateriellen Kulturerbes geführt: die Repräsentative Liste des Immateriellen Kulturerbes der Menschheit, die Liste des dringend erhaltungsbedürftigen Immateriellen Kulturerbes und das Register Guter Praxisbeispiele (UNESCO 2024b).

[4] Eine Übersetzung von intangible cultural heritage of humanity (UNESCO 2024b).

[5] Jeder Vertragsstaat des UNESCO-Übereinkommens (UNESCO 2003) kann das Verfahren zur Aufnahme von Kulturformen in die nationalen Verzeichnisse auf Basis des Konventionstextes ausgestalten. Die Bundesrepublik Deutschland hat ein mehrstufiges Bewerbungs- und Auswahlverfahren implementiert. Die Trägergruppen bzw. Einzelpersonen bewerben sich im zweijährigen Turnus um die Anerkennung mit einheitlichen Unterlagen in ihrem Bundesland. Dabei kreieren die Länder analog zum Bund eigene Verfahren für die Vorauswahl. In Nordrhein-Westfalen berät z.B. eine interdisziplinäre Expertinnen- und Expertenjury das Ministerium für Kultur und Wissenschaft und spricht Empfehlungen für die Auswahl aus. Die Länder nominieren eine begrenzte Anzahl von Vorschlägen für das Bundesweite Verzeichnis. Unter Einbeziehung des Kultusministerkonferenz-Kulturausschusses diskutiert ein Expertenkomitee bei der Deutschen UNESCO-Kommission die Ländervorschläge und empfiehlt Kulturformen für die Eintragung in die nationalen Listen. Erst nach Bestätigung durch die Kultusministerkonferenz und die Bundesbeauftragte für Kultur und Medien erfolgt die offizielle Anerkennung als immaterielles Kulturerbe in Deutschland. Auf internationaler Ebene gestaltet sich das Verfahren ähnlich komplex (UNESCO 2024c).

[6] Auswirkungen: Unser heutiger Kalender geht auf den römischen zurück und kennt kein Jahr 0. Vom 31.7. im Jahr 5 v.u.Z. bis zum 31.7. im Jahr 5 u.Z. sind es also 9 und nicht 10 Jahre. In der Astronomie wurde das Jahr 0 eingeführt, um solche Rechenprobleme zu vermeiden. Das astronomische Jahr 0 entspricht 1 v.u.Z., das astronomische Jahr -1 dem Jahr 2 v.u.Z. Die in der EU verbindliche Datumsnorm (EN 28601, ISO 8601) arbeitet auch mit negativen und positiven Zahlen und dem Jahr 0 (Wikipedia 2021w). Aus abstrakter algebraischer Sicht sind die natürlichen Zahlen sowohl mit der Addition als auch mit der Multiplikation ein Monoid (Wikipedia 2021i). Im römischen System ist dies nur für die Multiplikation erkennbar, da das neutrale Element 1 dargestellt wird, nicht aber für die Addition, da das neutrale Element 0 fehlt. Allerdings bleibt festzuhalten, dass das römische System bis ins späte Mittelalter hinein in Europa durchaus als funktionierend wahrgenommen wurde. Die Null war insofern auch nicht notwendig, denn sie hätte für dieses praktische Funktionieren keinen relevanten Beitrag geleistet.

[7] Aufgrund dieser Sonderstellung des Positionssystems zur Basis 10 werden Zahlen häufig (aber fälschlicherweise) mit ihrer indo-arabischen Darstellung im dezimalen Stellenwertsystem identifiziert. Die zehn Ziffern gelten als die authentische Notation der Zahlen.

[8] Die erste Darstellung des Binärsystems wird John Napier im Jahr 1616 zugeschrieben (Kaplan 2004, S. 215).

[9] Der Roman „Medicus" handelt von dem Universalgelehrten Ibn Sīnā (latinisiert: Avicenna) und den überlegenen medizinischen Kenntnissen der mittelalterlichen arabischen Welt (Gordon 1987). In seiner Autobiographie berichtet Ibn Sīnā, dass die indische Zahldarstellung um 990 u.Z. nach Südrussland gelangte (Kaplan 2004: 103).

[10]„Im Altenglischen führte das zu zwei Wörtern: algorism, was in gelehrten Schriften bis vor noch recht kurzer Zeit zu algorithm entstellt wurde, und augorime oder einfach augrime, was in der Literatur verbreitet ist. So verwendet es Chaucher in »Die Erzählung des Müllers« (um 1386)" (Barrow 2005: 158).

[11] Kaplan (2004: 110) zitiert aus dem ersten zu al-Ḫwārizmīs Arbeit bekannten englischen Text *The Crafte of Nombrynge*, geschrieben um 1350: „Das Buch heißt das Buch von Algorim oder im ungelehrten Gebrauche, Augrym … und handelt von der Kunst des Zählens, die welche Algorym genannt. Einst gab es einen König von Indien, welcher Algor geheißen und nämliche Kunst erfand".

[12]„Sofern man einen einzelnen Satz den wichtigsten Satz nennen kann, der je geschrieben worden ist, ist er der folgende aus dem Liber Abaci" (Olivastro 1995: 227).

[13]Olivastro spielt auf den Titel des ägyptischen Rhind-Papyrus an, geschrieben von Ahmes um 1650 v.u.Z., in dem verschiedene mathematische Themen, von Arithmetik über Algebra und Geometrie bis zur Bruchrechnung behandelt werden (Olivastro 1995: 43ff, Wußing 2013a: 113ff).

[14] Mathematisches Handbuch des Meisters Sunzi, zwischen dem 3. und 5. Jahrhundert u.Z. entstanden (Olivastro 1995: 244f).

[15] Das Verfahren inkl. Ablauf, Formblättern, Antragstellung, Entscheidergremien und Schriftwechseln ist ausführlich dargestellt (Zwanzigeins e.V. 2024f).

Danksagung

Wir danken Herrn Prof. Dr. Menso Folkerts, Ludwig-Maximilians-Universität, München und Frau Dr. Maria Harnack, Landesstelle Immaterielles Kulturerbe NRW an der Universität Paderborn für die kritische Durchsicht einer früheren Version des Artikels und für hilfreiche Verbesserungsvorschläge. Herrn Dr. Henning Thielemann sei gedankt für aktuelle Beispiele zur Verwendung verallgemeinerter Stellenwertsysteme in der Informatik.

Literatur

Aczel, A. D. (2015). Finding Zero: A Mathematician's Odyssey to Uncover the Origins of Numbers. Basingstoke: Palgrave Macmillan.

al-Khalili, J. (2013). Im Haus der Weisheit - Die arabischen Wissenschaften als Fundament unserer Kultur. Frankfurt: Fischer Taschenbuch.

Alten, H.-W., Naini, A.D., Folkerts, M., Schlosser, H., Schlote, K.-H., & Wußing, H. (2003). 4000 Jahre Algebra – Geschichte, Kulturen, Menschen. Berlin/Heidelberg/New York: Springer.

Bachman, G. (1964). Introduction to p-adic Numbers and Valuation Theory. New York: Academic Press.

Bakr, S., Ezbidi B., Hassan D.M.J., Karcic F., Kassab-Hassan H., & Zaidi M. (2003). Die muslimische Welt und der Westen. In L. Watzal (Hrsg.), Der Islam, Beilage „Aus Politik und Zeitgeschichte“ in „Das Parlament“, B 37 / 2003: 6-14. Bonn: Bundeszentrale für politische Bildung. https://www.bpb.de/apuz/27418/die-muslimische-welt-und-der-westen?p=all. Aufgerufen am 02.04.2024.

Barrow, J. D. (2005). Ein Himmel voller Zahlen – Auf den Spuren mathematischer Wahrheit, 4. Aufl. Reinbeck: Rowohlt Taschenbuch.

Beaujouan, G. (1957). La science dans l'Occident médiéval chrétien. In Histoire générale des sciences I: 517-534, Hrsg. René Taton, Paris: Presse Universitaire de France (Neuaufl. 1966–1983 und 1996).

Becker, O. (1975). Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. Berlin: Suhrkamp Taschenbuch [diese Ausgabe ist identisch mit der 1964 im Karl Alber Verlag Freiburg/München erschienenen 2. Aufl.].

Bellos A. (2020). Alex's Adventures in Numberland. London: Bloomsbury.

Berg, T. (2024) Numerical place switching. (Entwurf)

Bhatt, B. (2014). What is a perfectoid space? Notices of the AMS 61:1082-1084.

Bischoff, M. (2023). Die Zahl, die ihr eigenes Quadrat ist. Spektrum.de. https://www.spektrum.de/kolumne/von-automorphen-zu-p-adischen-zahlen/2198509. Aufgerufen am 02.04.2024.

Bossong, G. (2007). Das Maurische Spanien, Geschichte und Kultur. München: C.H. Beck.

Breger, H. (2009). Leibniz' binäres Zahlensystem als Grundlage der Computertechnologie. Jahrbuch der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen 2008, Berlin, New York, 385-391. https://rep.adw-goe.de/bitstream/handle/11858/00-001S-0000-0007-3724-4/Article-29.pdf?sequence=1. Aufgerufen am 02.04.2024.

Bundeskanzleramt der Republik Österreich. (2023). Lehrplan der Volksschule. BGBl. II - Ausgegeben am 2. Jänner 2023 - Nr. 1. https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2023_II_1/Anlagen_0001_CE7F0AA2_A925_4A4D_8C3C_355D12BD22D1.pdfsig. Aufgerufen am 02.04.2024.

Calude, A.S. & Verkerk, A. (2016). The typology and diachrony of higher numerals in Indo-European: a phylogenetic comparative study. Journal of Language Evolution 1: 91–108. https://doi.org/10.1093/jole/lzw003. https://academic.oup.com/jole/article/1/2/91/2281899. Aufgerufen am 02.04.2024.

Cauty, A. & Hoppan, J.-M. (2006). Die zwei Nullen der Maya. Spektrum der Wissenschaft. Ethnomathematik. Spektrum Spezial. 2/2006, S. 22 - 25.

Chorlay R., Clark K.M., Tzanakis C. (2022a) Exploring the significance of the history of mathematics in mathematics education, ZDM – Mathematics Education 54(7). https://link.springer.com/journal/11858/volumes-and-issues/54-7. Aufgerufen am 02.04.2024.

Chorlay R., Clark K.M., Tzanakis C. (2022b) History of mathematics in mathematics education: Recent developments in the field. ZDM – Mathematics Education 54:1407–1420 https://doi.org/10.1007/s11858-022-01442-7. Aufgerufen am 02.04.2024.

Clark K.M., Kjeldsen T.H., Schorcht S., & Tzanakis C. (2019) History of Mathematics in Mathematics Education - An Overview. Mathematica didactica 42:1. https://journals.ub.uni-koeln.de/index.php/mathematica_didactica/article/view/1374. Aufgerufen am 02.04.2024.

Dantzig, T. (2007). (Erstpublikation: 1930) Number: The Language of Science. New York: Plume (Übersetzung des zitierten Satzes: Ifrah 1991, 480).

Deiser, O. (2022). Reelle Zahlen. Das klassische Kontinuum und die natürlichen Folgen. https://www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=reellezahlen. Aufgerufen am 02.04.2024.

Delahaye, J.-P. (2005). Die bizarre Welt der links-unendlichen Zahlen. Spektrum der Wissenschaft, Spezial 2-05: Unendlich (plus 1), 24-31.

Deutsche Gesellschaft für Kinder- und Jugendpsychiatrie, Psychosomatik und Psychotherapie e. V. (2018). *S3-Leitlinie: Diagnostik und Behandlung der Rechenstörung.* https://www.bvl-legasthenie.de/images/static/pdfs/Leitlinien/S3-Leitlinie_Rechenstrung_Langfassung.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

Deutsche UNESCO-Kommission (2014). Wissen. Können. Weitergeben. Bundesweites Verzeichnis Immaterielles Kulturerbe. Brandt GmbH: Bonn.

Deutsche UNESCO-Kommission (2019a). Wissen. Können. Weitergeben. Bundesweites Verzeichnis Immaterielles Kulturerbe. Spree Druck: Berlin, 3. Aufl. https://www.unesco.de/kultur-und-natur/immaterielles-kulturerbe/immaterielles-kulturerbe-deutschland. Aufgerufen am 02.04.2024.

Deutsche UNESCO-Kommission (2019b). Immaterielles Kulturerbe der Menschheit. https://www.unesco.de/kultur-und-natur/immaterielles-kulturerbe/immaterielles-kulturerbe-weltweit/unesco-erkennt-21-0. Aufgerufen am 02.04.2024.

Deutsche UNESCO-Kommission (2020). Immaterielles Kulturerbe kurz erklärt. Stand: 15.07.2020. https://www.unesco.de/sites/default/files/2020-07/IKE_kurzerkl%C3%A4rt.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

Deutsche UNESCO-Kommission (2024a). Überliefertes Wissen und Können wertschätzen. https://www.unesco.de/kultur-und-natur/immaterielles-kulturerbe/immaterielles-kulturerbe-deutschland. Aufgerufen am 02.04.2024.

Deutsche UNESCO-Kommission (2024b). Immaterielles Kulturerbe weltweit. https://www.unesco.de/kultur-und-natur/immaterielles-kulturerbe/immaterielles-kulturerbe-weltweit. Aufgerufen am 02.04.2024.

Deutsche UNESCO-Kommission (2024c). Falknerei als Immaterielles Kulturerbe der Menschheit anerkannt. https://www.unesco.de/kultur-und-natur/immaterielles-kulturerbe/immaterielles-kulturerbe-weltweit/falknerei-als. Aufgerufen am 02.04.2024.

Deutsche UNESCO-Kommission (2024d). Immaterielles Kulturerbe werden. https://www.unesco.de/kultur-und-natur/immaterielles-kulturerbe/immaterielles-kulturerbe-werden. Aufgerufen am 02.04.2024.

Deutsche UNESCO-Kommission (2024e). Genossenschaftsidee als Immaterielles Kulturerbe der Menschheit anerkannt. https://www.unesco.de/kultur-und-natur/immaterielles-kulturerbe/immaterielles-kulturerbe-weltweit/genossenschaftsidee-als. Aufgerufen am 02.04.2024.

Deutsche UNESCO-Kommission (2024f). Bewerbungsformular für das Bundesweite Verzeichnis des Immateriellen Kulturerbes. https://www.unesco.de/sites/default/files/2021-03/Bewerbungsformular_Bundesweites-Verzeichnis_2021-22.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

Deutsche UNESCO-Kommission (2024g). UNESCO-Übereinkommen zur Erhaltung des Immateriellen Kulturerbes. https://www.unesco.de/kultur-und-natur/immaterielles-kulturerbe/immaterielles-kulturerbe-weltweit/unesco-uebereinkommen. Aufgerufen am 02.04.2024.

Diller, A. (1996). New zeros and old Khmer. Mon-Khmer Studies 25:125-132. http://sealang.net/sala/archives/pdf8/diller1996new.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

DMV-GDM-MNU (2008). Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik. Empfehlungen der Deutschen Mathematiker Vereinigung, der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik und des Verbandes zur Förderung des MINT-Unterrichts.https://madipedia.de/images/2/21/Standards_Lehrerbildung_Mathematik.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

Eckstein B. (2020). Verdrehte Zahlwörter. Trick zehnsieben hilft! Wuppertal: Eigenverlag Berthold Eckstein.

Endl, K., & Luh W. (1979). Analysis III, Eine integrierte Darstellung: Funktionentheorie und Differentialgleichungen, 3. Aufl. Wiesbaden: Akademische Verlagsgesellschaft.

Flegg, G. (1989). Numbers Through the Ages. London: Palgrave.

Folkerts, M. (1997). Die älteste lateinische Schrift über das indische Rechnen nach al-Ḫwārizmī, Übersetzung und Kommentar. München: Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften.

Forster, O. (1978). Analysis 1, Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Fothe, M., Schmitz M., Skorsetz B., & Tobies R. (2014). Mathematik und Anwendungen, Thillmreihe: Forum 14:5-7. https://www.schulportal-thueringen.de/media/detail?tspi=4818. Aufgerufen am 02.04.2024.

Freistetter, F. (2024). Mit mathematischer Lyrik zur Kreiszahl Pi. Spektrum.de. https://www.spektrum.de/kolumne/ein-gedicht-fuer-pi/2215085. Aufgerufen am 02.04.2024.

Fromme, M. & Schulz, A. (2018). Stellenwertverständnis: Materialdeutung, Zahlendreher und inverses Schreiben. In: Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2018, 569-572. Münster: WTM-Verlag URL: https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/37341/1/BzMU18_FROMME_Stellenwertverstaendnis.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

Fuchs, E., Haberfellner , C. & Öhlerer, K. (2014). Srachsensibler Unterricht in der Grundschule. Fokus Mathematik. Wien: ÖSZ. https://www.oesz.at/fileadmin/external_import/oeszatdb36/publikationen/Praxisreihe_22_FINAL_WEB.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

Gaidoschik, M. (2015). Einige Fragen zur Didaktik der Erarbeitung des „Hunderterraums“. Journal für Mathematik-Didaktik, 35, S. 163-190.

Gaidoschik, M. (2021). Rechenschwäche vorbeugen Das Handbuch für LehrerInnen und Eltern 1. Schuljahr: Vom Zählen zum Rechnen (7. Auflage). G&G Verlag.

Gaidoschik, M., Moser Opitz, E., Nührenbörger, M., & Rathgeb-Schnierer, E. (2021). Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. Special Issue der Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 47(111S). https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/issue/view/46. Aufgerufen am 02.04.2024.

Gaidoschik, M. (2022). Rechenschwäche verstehen – Kinder gezielt fördern. Hamburg: Persen.

Gerritzen, L. (2008). Zwanzigeins - für die unverdrehte Zahlensprechweise. Bochum: Brockmeyer. https://zwanzigeins.jetzt/infos/literatur. Aufgerufen am 02.04.2024.

Gingerich, O. (2006). Die islamische Periode der Astronomie. Spektrum der Wissenschaft, Dossier 4-06: Astronomie vor Galilei, S. 38-47

Gobel, J. (2024). Geschichte der Aquarellmalerei. https://www.kunst-und-farbe.de/aquarellmalerei/geschichte-der-aquarellmalerei/. Aufgerufen am 02.04.2024.

Goethe-Institut (2017). 500 Jahre Reformation „Aufs Maul geschaut“. https://www.goethe.de/de/uun/pub/akt/g17/21249117.html. Aufgerufen am 02.04.2024.

Gordon, N. (1987). Der Medicus. München: Droemer Knaur.

Gouvea, F. Q. (1993). P-adic Numbers. Springer, New-York

Grattan-Guinness, I. (2004). History or heritage? An important distinction in mathematics for mathematics education. The American Mathematical Monthly, 111(1), 1–12. https://doi.org/10.1080/00029890.2004.11920041

Gupta, R. C. (1983). Spread and triumph of Indian numerals, Indian J. Hist. Sci. 18, S. 23-38. https://insa.nic.in/writereaddata/UpLoadedFiles/IJHS/Vol18_1_4_RCGupta.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

Haarmann, H. (2008). Weltgeschichte der Zahlen. München: C. H. Beck.

Hensel, K. (1908). Theorie der algebraischen Zahlen. Leipzig/Berlin: Teubner.

Hensel, K. (1913). Zahlentheorie. Berlin: Göschen.

Heymann, H. W. (1996). Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim an der Bergstr. & Basel: Beltz.

Hergenhahn, R. (2008) Die Köbelschen Zahlentafeln in seinen Rechenbüchern. In: Gerritzen 2008, S. 109-112.

Hoffmann, D. W (2013). Die Gödel'schen Unvollständigkeitssätze. Eine geführte Reise durch Gödels historischen Beweis. Heidelberg: Springer.

Hofstadter D. R. (1985). Gödel, Escher, Bach - Ein endloses geflochtenes Band, 6. Aufl. Stuttgart: Klett-Cotta.

HPM – History of Pedagogy in Mathematics Education (2024) International Study Group on the relations between History and Pedagogy of Mathematics. https://hpm.sites.uu.nl/. Aufgerufen am 02.04.2024.

Hußmann, S., & Nührenbörger M. (2024). Entwicklung eines Stellenwertverständnisses. Förderzentrum Mathematik, TU Dortmund. https://foerderzentrum.mathematik.tu-dortmund.de/drupal/mathematischebasiskompetenzen/entwicklung-eines-stellenwertverstaendnisses. Aufgerufen am 02.04.2024.

Ifrah, G. (1991). Die Universalgeschichte der Zahlen, 2. Aufl. Frankfurt/New York: Campus.

Kaplan, R. (2004). Die Geschichte der Null, 3. Aufl. München: Piper.

Katz, V. J. (1993). A History of Mathematics. New York: Harper-Collins College Publishers.

Keisler, J. (2012). Elementary Calculus - An Infinitesimal Approach. 2. Auflage. Stanford: Creative Commons. https://people.math.wisc.edu/~hkeisler/calc.html. Aufgerufen am 02.04.2024.

Knuth, D. E. (1981). The Art of Computer Programming. Boston, MA: Addison-Wesley.

Köbel, J. (1517). Ain new geordnet Rechenbiechlin auf den linien mit Rechen pfeningen, Augsburg 1514. 2. Aufl. Oppenheim. https://daten.digitale-sammlungen.de/~db/bsb00009314/images/. Aufgerufen am 02.04.2024.

Köbel, J. (1520). Mit der kryde od' Schreibfedern / durch die zeiferzal zů rechē / Ein neü Rechēpüchlein / den angenden Schülern d' rechnūg zů erē getrückt (siehe Gerritzen 2008, S. 111)

Köbel, J. (1522). Ein neüw Rechenpüchlein, wie mann uff den Linien und Spacien mit Rechenpfenningen leichtlich rechen lernen solle mit viln zuosetzen vor nie getrückt und ytzunt zuo Openheym offenbart. Oppenheim. http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-15628. Aufgerufen am 02.04.2024.

Kultusministerkonferenz (2019). Standards für die Lehrerbildung: Bildungswissenschaften (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 16.12.2004 i. d. F. vom 16.05.2019). https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_12_16-Standards-Lehrerbildung-Bildungswissenschaften.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

Kultusministerkonferenz (2022). Bildungsstandards für das Fach Mathematik Primarbereich (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004, i.d.F. vom 23.06.2022). https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-Primarbereich-Mathe.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

Kultusministerkonferenz (2024). Immaterielles Kulturerbe. https://www.kmk.org/themen/kultur/immaterielles-kulturerbe.html. Aufgerufen am 02.04.2024.

Kunitzsch, P. (2005). Zur Geschichte der `arabischen‘ Ziffern. Bayerische Akademie der Wissenschaften, Philosophisch-historische Klasse, Sitzungsberichte, Jahrgang 2005, Heft 3. http://publikationen.badw.de/de/020836794/pdf/CC%20BY

Kunitzsch, P. (2006). Arabisches am Sternhimmel. Spektrum der Wissenschaft, Dossier 4-06: Astronomie vor Galilei, 49-53.

LABG (2009) Gesetz über die Ausbildung für Lehrämter an öffentlichen Schulen. NRW. https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/bildungswissenschaften/labgneu-1.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

Lam, L. Y., & Ang T. S. (2004). Fleeting Footsteps; Tracing the Conception of Arithmetic and Algebra in Ancient China, Singapur: World Scientific Publishing.

Leibniz, G. W. (1679). De Progressione Dyadica, Pars I, (MS, 15 March 1679), veröffentlicht in Facsimile (mit deutscher Übersetzung). In Herrn von Leibniz' Rechnung mit Null und Eins, Hrsg. Erich Hochstetter und Hermann-Josef Greve, Berlin: Siemens Aktiengesellschaft, 1966. https://www.bibnum.education.fr/sites/default/files/69-analysis-leibniz.pdf. . Aufgerufen am 02.04.2024.

Leibniz, G. W. (1703). Explication de l'arithmétique binaire qui se sert des seuls caractères 0 & 1 avec des remarques sur son utilité & sur ce qu'elle donne le sens des anciennes figures chinoises de Fohy. Memoires de l'Academie Royale des Sciences. http://www.leibniz-translations.com/binary.htm. Aufgerufen am 02.04.2024.

MacTutor (2024a). Indian numerals. In History of Mathematics Archive, Hrsg. John O'Connor und Edmond F. Robinson. St Andrews University. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Indian_numerals/. Aufgerufen am 02.04.2024.

MacTutor (2024b). The Arabic numeral system. In History of Mathematics Archive, Hrsg. John O'Connor und Edmond F. Robinson. St Andrews University. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Arabic_numerals/. Aufgerufen am 02.04.2024.

MacTutor (2024c). Arabic mathematics : forgotten brilliance? In History of Mathematics Archive, Hrsg. John O'Connor und Edmond F. Robinson. St Andrews University. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Arabic_mathematics/. Aufgerufen am 02.04.2024.

MacTutor (2024d). Madhava of Sangamagramma. In History of Mathematics Archive, Hrsg. John O'Connor und Edmond F. Robinson. St Andrews University. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Madhava/. Aufgerufen am 02.04.2024.

MacTutor (2024e). Abraham Robinson. In History of Mathematics Archive, Hrsg. John O'Connor und Edmond F. Robinson. St Andrews University. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Robinson/. Aufgerufen am 02.04.2024.

Maurer, B. (2017). Mathematik – die faszinierende Welt der Zahlen. Köln: Naumann & Göbel.

Menninger, K. (1958). Zahlwort und Ziffer. 2 Bde. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht.

Menzer, H. (2010). Zahlentheorie. München: Oldenbourg.

Meyerhöfer, W. (2015). Zweizehneins, Zwanzigeins, Einundzwanzig. Skizze einer stellenwertlogisch konsistenten Konstruktion der Zahlwörter im Deutschen. Pädagogische Korrespondenz 52/15: 21-41.

Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen (2004a). Kernlehrplan für die Realschule in Nordrhein-Westfalen: Mathematik. ISBN 3–89314–738–1, Heft 3302, Ritterbach Verlag GmbH, Frechen. https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/lehrplaene_download/realschule/rs_mathematik.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen (2004b). Kernlehrplan für die Gesamtschule – Sekundarstufe I in Nordrhein-Westfalen: Mathematik. ISBN 3–89314–741–1, Heft 3106, Ritterbach Verlag GmbH, Frechen. https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/44/gs_mathematik.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2020). Merkblatt - Einstellung in den Vorbereitungsdienst für das Lehramt Grundschule zum 01.11.2020. https://www.schulministerium.nrw.de/sevon/2020_1/allgemeineHinweise/MerkblattGrundschule.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2008). Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen: Deutsch, Sachunterricht, Mathematik, Englisch, Musik, Kunst, Sport, Evangelische Religionslehre, Katholische Religionslehre. ISBN 978–3–89314–965–0, Heft 2012, Ritterbach Verlag GmbH, Frechen. https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/klp_gs/LP_GS_2008.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2011). Kernlehrplan und Richtlinien für die Hauptschule in Nordrhein-Westfalen: Mathematik, Heft 3203. https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/43/Mathe_HS_KLP.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2007). Kernlehrplan für das Gymnasium – Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein-Westfalen: Mathematik. ISBN 978-3–89314–842-0, Heft 3401(G8), Ritterbach Verlag GmbH, Frechen. https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/46/gym8_mathematik.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

Morfeld, P. & Summer, A. (2024) Zwanzigeins. Editorial in Lernen und Lernstörungen (2024), 13(1), 1 – 3. https://doi.org/10.1024/2235-0977/a000429. Aufgerufen am 02.04.2024.

Nagel, E. & Newman J. R. (2010). Der Gödelsche Beweis, 9. Aufl. München: R. Oldenbourg.

Niederstenbruch, A. (1942). Zum ‚Rösselsprung' bei den Zehnerzahlen. Zur Frage der Bildung der zusammengesetzten Zahlwörter. Zeitschrift für neusprachlichen Unterricht 41: 80–83.

Olivastro, D. (1995). Das Chinesische Dreieck. München: Droemer Knaur.

O'Shea, D. (2009). Poincarés Vermutung. Frankfurt: Fischer.

Peckhaus, V. (1984). Der nationalsozialistische „neue Begriff" von Wissenschaft am Beispiel der „Deutschen Mathematik" – Programm, Konzeption und politische Realisierung. Diplomarbeit, RWTH Aachen. https://publications.rwth-aachen.de/record/229987/files/2696.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

Penrose, R. (1995). Schatten des Geistes – Wege zu einer neuen Physik des Bewusstseins. Heidelberg/Berlin/Oxford: Spektrum Akademischer Verlag.

Pickover, C. A. (2014). Die Geschichte der Medizin. Kerkdiel: Librero.

RedaktionsNetzwerk Deutschland (2019). Panorama - Leider kein Witz: Mehrheit der Amerikaner will arabische Ziffern vom Lehrplan nehmen, 18.05.2019. https://www.rnd.de/panorama/leider-kein-witz-mehrheit-der-amerikaner-will-arabische-ziffern-vom-lehrplan-nehmen-YFR7UCBMMYAA5LILFHZUYWOTKU.html. Aufgerufen am 02.04.2024.

Ries, A. (1522). Rechnung auf Linien und Federn, 114. Aufl. Magistrat der Stadt Erfurt, Erfurt 1991

Sakaki M., Murayama K., Frenzel A.C., Goetz T., Marsh H.W., Lichtenfeld S., Pekrun R. (2023). Developmental trajectories of achievement emotions in mathematics during adolescence. Child Development 95: 276-295. https://doi.org/10.1111/cdev.13996. Aufgerufen am 02.04.2024.

Schellenberger, M. (1953). Zahlwort und Schriftbild der Zahl. Leipzig: VEB Bibliographisches Institut.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2015). Handbuch für den Mathematikunterricht 1. Schuljahr. Braunschweig: Westermann.

Schipper, W., Ebeling, A. & Dröge, R. (2022). Handbuch für den Mathematikunterricht: 2. Schuljahr. Braunschweig: Westermann.

Schmid, S. (2023). Zwanzigeins - Eine empirisch-quantitative Untersuchung zur Zahleninversion in der zweiten Schulstufe. Masterarbeit in Erziehungswissenschaft, Primarstufe. Kirchliche Pädagogische Hochschule Wien/Krems. https://zwanzigeins.jetzt/aktivitaeten/projekte/unterrichtsversuche. Aufgerufen am 02.04.2024.

Scholze, P. (2012). Perfectoid spaces: a survey. Current Developments in Mathematics, 193 – 227. 10.4310/CDM.2012.v2012.n1.a4. Aufgerufen am 02.04.2024.

Schülke, A. (1915). Zahlwörter und Positionssystem. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen, 518-522.

Schulz, A. (2016). Inverses Schreiben und Zahlendreher – Eine empirische Studie zur inversen Schreibweise zweistelliger Zahlen. In: Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2016, 883-886. Münster: WTM-Verlag. URL: https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/35460/1/BzMU16%20SCHULZ%20invers.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

Schuppener, G. (2014). Warum 21 einundzwanzig heißt: Die höheren Einerzahlwörter im Deutschen. Geschichte ihrer Bildung und Reformideen. Wien: Praesens Verlag.

Schwippert, K., Kasper D., Köller O, McElvany N, Selter C, Steffensky M & Wendt H. (2020). TIMSS 2019: Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann. https://www.waxmann.com/index.php?eID=download&buchnr=4319. Aufgerufen am 02.04.2024.

Seife, C. (2000). Zero: The Biography of a Dangerous Idea. New York: Viking.

Seng, E.-M. (2012). Materielles und Immaterielles Kulturerbe – global, regional, glokal? Tagung Museumsverband Baden-Württemberg e.V. „Kulturerbe Baden-Württemberg" 09./10. März 2012, Stuttgart. https://www.museumsverband-bw.de/fileadmin/user_upload/mvbw/pdfs/Tagungsvortraege/2012/Seng_-_Materielles_und_Immaterielles_Kulturerbe.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

Seng, E.-M. (2014). Aus Fehlern lernen? Was kann man bei der Vergabe des Titels immaterielles Kulturerbe aus den Erfahrungen mit dem materiellen Kulturerbe ableiten und verbessern? Politik und Kultur. Zeitung des Deutschen Kulturrates 14(1): 15-16.

Seng, E.-M. (2017). Die UNESCO-Konvention zur Erhaltung des immateriellen Kulturerbes. Heimatpflege in Westfalen 30(1): 1-4. https://www.whb.nrw/367-download/Heimatpflege/2017/HiW_1_2017_RZ_INet.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

Sigler, L. E (2002). Fibonacci's Liber Abaci, A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation. New York: Springer. https://altexploit.files.wordpress.com/2017/07/sources-and-studies-in-the-history-of-mathematics-and-physical-sciences-laurence-sigler-auth-fibonacci_s-liber-abaci_-a-translation-into-modern-english-of-leonardo-pisano_s-book.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

Steimann, F. (2018). Einsen und Nullen: Grundlagen der Digitalisierung. Fakultät für Mathematik und Informatik der Fernuniversität in Hagen. http://www.feu.de/ps/oer/K10w.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

Strohmaier, G. (2006a). Al-Biruni – Ein Gelehrter, den das Abendland übersah. Spektrum der Wissenschaft, Dossier 4-06: Astronomie vor Galilei, 22-29

Strohmaier, G. (2006b). Alhazen – Physik am Rande des Irrsinns. Spektrum der Wissenschaft, Dossier 4-06: Astronomie vor Galilei, 30-37

Summer A. (2019). Der liebenswerte Zehner: Warum wir beim Aussprechen einer Zahl den Einer vor dem Zehner sagen. Sankt Pölten: forfuture Verlag.

Summer, A. (2023). Die universelle Sprache der Mathematik - Fachdidaktische Aspekte mit dem Fokus auf die Primarstufe. Antrittsvorlesungen an der KPH Wien/Krems: Band 9. Wien/Krems 2023

Tropfke, J. (1980). Geschichte der Elementarmathematik. Bd. 1, 4. Aufl. Berlin/New York: Walter de Gruyter.

UNESCO (2003). Übereinkommen zur Erhaltung des Immateriellen Kulturerbes. https://www.unesco.de/sites/default/files/2023-03/%C3%9CEK_IKE_D_040313.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

UNESCO (2004). Zielrahmen der Konvention. https://www.unesco.de/sites/default/files/2019-01/Zielrahmen%20UNESCO-IKE-Konvention.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

UNESCO (2024a). What is Intangible Cultural Heritage? https://ich.unesco.org/en/what-is-intangible-heritage-00003. Aufgerufen am 02.04.2024.

UNESCO (2024b). Purpose of the lists. https://ich.unesco.org/en/purpose-of-the-lists-00807. Aufgerufen am 02.04.2024.

UNESCO (2024c). Procedure of inscription of elements on the Lists and of selection of Good Safeguarding Practices. https://ich.unesco.org/en/procedure-of-inscription-00809. Aufgerufen am 02.04.2024

Van Brummelen, G. (2024). Decimal fractional numeration and the decimal point in 15th-century Italy. Hist. Math., https://doi.org/10.1016/j.hm.2024.01.001. Aufgerufen am 02.04.2024.

von Neumann, J. (2000). The Computer and the Brain, 2. Aufl. Mrs. Hepsa Ely Silliman Memorial Lectures. New Haven: Yale University Press.

Wendt, H., Bos W., Selter C., Köller O., Schwippert K., & Kasper D. (2016). TIMSS 2015. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich. Münster/New York: Waxmann. https://www.waxmann.com/fileadmin/media/zusatztexte/3566Volltext.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

Wikipedia (2024a). Automatisierter Handel. https://de.wikipedia.org/wiki/Automatisierter_Handel. Aufgerufen am 02.04.2024.

Wikipedia (2024b). Computeralgebra. https://de.wikipedia.org/wiki/Computeralgebra. Aufgerufen am 02.04.2024.

Wikipedia (2024c). Datumsformat. https://de.m.wikipedia.org/wiki/Datumsformat. Aufgerufen am 02.04.2024.

Wikipedia (2024d). Deutsche Mathematik. https://de.m.wikipedia.org/wiki/Deutsche_Mathematik. Aufgerufen am 02.04.2024.

Wikipedia (2024e). Elementarladung. https://de.wikipedia.org/wiki/Elementarladung. Aufgerufen am 02.04.2024.

Wikipedia (2024f). Immaterielles Kulturerbe. https://de.wikipedia.org/wiki/Immaterielles_Kulturerbe. Aufgerufen am 02.04.2024.

Wikipedia (2024g). Industrie 4.0. https://de.wikipedia.org/wiki/Industrie_4.0. Aufgerufen am 02.04.2024.

Wikipedia (2024h). Künstliche Intelligenz. https://de.wikipedia.org/wiki/Künstliche_Intelligenz. Aufgerufen am 02.04.2024.

Wikipedia (2024i). Monoid. https://de.wikipedia.org/wiki/Monoid. Aufgerufen am 02.04.2024.

Wikipedia (2024j). Peter Scholze. https://de.wikipedia.org/wiki/Peter_Scholze. Aufgerufen am 02.04.2024.

Wikipedia (2024k). Stellenwertsystem. https://de.wikipedia.org/wiki/Stellenwertsystem. Aufgerufen am 02.04.2024.

Wikipedia (2024l). SRT-Division. https://de.wikipedia.org/wiki/SRT-Division. Aufgerufen am 02.04.2024.

Wikipedia (2024m). Zstandard. https://de.wikipedia.org/wiki/Zstandard. Aufgerufen am 02.04.2024.

Wikipedia (2024n). Asymmetrische Zahlensysteme. https://de.wikipedia.org/wiki/Asymmetric_Numeral_Systems. Aufgerufen am 02.04.2024.

Wikipedia (2024o). Arithmetische Kodierung. https://de.wikipedia.org/wiki/Arithmetisches_Kodieren. Aufgerufen am 02.04.2024.

Wikipedia (2024p). Posit (Unum III)-Zahlenformat. https://en.wikipedia.org/wiki/Posit_(number_format). Aufgerufen am 02.04.2024.

Wolf, A. (1938). A history of science, technology, and philosophy in the eighteenth century. Siehe Abschnitt „Calculating machines", 654–660. London: George Allen & Unwin (2. Aufl. 1951).

Wolf, K. W. & Soppa J. (2010). Nucleinsäuren, Chromatin und Chromosomen. In: Genetik – Taschenlehrbuch Biologie, Hrsg. Katharina Munk. Stuttgart, New York: Georg Thieme.

Wußing, H. (2013a). 6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise. I: Von den Anfängen bis Leibniz und Newton. Berlin/Heidelberg: Springer.

Wußing, H. (2013b). 6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise. II: Von Euler bis zur Gegenwart. Berlin/Heidelberg: Springer.

Ziegler, G. M. (2011). Mathematikunterricht liefert Antworten: Auf welche Fragen? Mitteilungen der DMV 19 (2011): 174-178. Walter de Gruyter, Berlin. http://www.math.ch/kanon/ziegler.pdf. Aufgerufen am 02.04.2024.

Zwanzigeins e.V. (2024a). Auch zwanzigeins und nicht nur einundzwanzig! https://zwanzigeins.jetzt/. Aufgerufen am 02.04.2024.

Zwanzigeins e.V. (2024b). Deutsch und Niederländisch – Auswirkungen der irregulären Zahlensprechweise. https://zwanzigeins.jetzt/infos/deutsch-und-niederlaendisch. Aufgerufen am 02.04.2024.

Zwanzigeins e.V. (2024c). Walisisch (Kymrisch), Tamil, Chinesisch vs. Englisch. https://zwanzigeins.jetzt/infos/walisisch-tamil-chinesisch-vs-englisch. Aufgerufen am 02.04.2024.

Zwanzigeins e.V. (2024d). Projekte. https://zwanzigeins.jetzt/aktivitaeten/projekte. Aufgerufen am 02.04.2024.

Zwanzigeins e.V. (2024e). Arbeitsgruppen. https://zwanzigeins.jetzt/aktivitaeten/arbeitsgruppen. Aufgerufen am 02.04.2024.

Zwanzigeins e.V. (2024f). Immaterielles Kulturerbe 2017. https://zwanzigeins.jetzt/aktivitaeten/projekte/immaterielles-kulturerbe-2017. Aufgerufen am 02.04.2024.

Zwanzigeins e.V. (2024g). Immaterielles Kulturerbe 2019. https://zwanzigeins.jetzt/aktivitaeten/projekte/immaterielles-kulturerbe-2019. Aufgerufen am 02.04.2024.

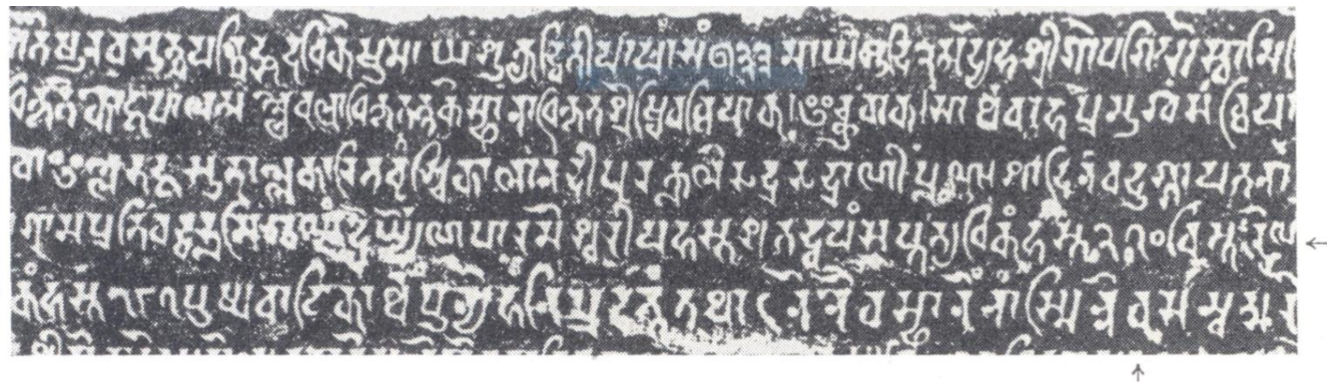
Anschrift der Verfasser

Peter Morfeld
Vorsitzender Zwanzigeins e.V.
Schlossweide 7
58239 Schwerte
peter.morfeld@rub.de

Lothar Gerritzen (†)
Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
Universitätsstraße 150
44780 Bochum
(Prof. Dr. Lothar Gerritzen
verstarb am 13.03.2024 während
der Schlussbearbeitung des
Manuskripts)

Abbildungen zu
Morfeld P, Gerritzen L: Stellenwertsystem und Ziffernrechnen als immaterielles Kulturerbe der Menschheit: ein Unterrichtsgegenstand für die Mathematik?

Abb. 1: Die Dezimalzahl 270 in einer Inschrift aus dem neunten Jahrhundert im Chatur-Bujha Tempel in Gwalior, Indien, gekennzeichnet durch zwei Pfeile (aus Menninger 1958, Bd. II, S. 214).



Erläuterungen

„Als erster gesicherter Nachweis der Null als Zahl in Indien (schon früher in Südostasien) wird eine Steintafel aus dem Ort Gwalior 500 km südlich von Neu-Delhi mit den Daten 27. Dezember 786, 10. Januar 787 und 17. Januar 787 angesehen, die von einer Gartenanlage handelt, deren Länge 270 (hastas) beträgt und 50 Blumengirlanden erhielt.“ Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Null
“ .. a plaque that dates from the Indian year equivalent to 875/876 AD. The inscription contains two instances of the symbol zero: in the number '270', referring to a piece of land of size 270 x 187 hastas, where hasta is a unit of length, and in the number "50", referring to a daily gift of 50 garlands of flowers.”
Quelle: Bellos A (2013) Nirvana by Numbers.
URL: https://www.theguardian.com/science/alexs-adventures-in-numberland/2013/oct/07/mathematics1

[Menninger K (1958) Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl. Band II: Zahlschrift und Rechnen. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen: das Urheberrecht an Abbildung auf S. 214 ist abgelaufen]

Abb. 2: Inschrift K-127 aus dem siebten Jahrhundert in Sambor am Mekong, Kambodscha, mit der ältesten bekannten dezimalen Null (Foto: Amir Aczel).

URL: http://www.phnompenhpost.com/post-weekend/did-ancient-cambodians-invent-zero

Erläuterungen
“The zero is the dot in the middle, to the right of the spiral-looking character, which is a 6 in Old Khmer. The numeral to the right of the dot is a 5, making the full number 605. The inscription says: “The Chaka era reached year 605 on the fifth day of the waning moon…” We know that in Cambodia the Chaka era began in the year 78 AD. Thus the date of this zero is 605 + 78 = 683.“
Quelle: Aczel AD (2013) How I Rediscovered the Oldest Zero in History, Discover.

„Die nachweislich erste Verwendung der Ziffer „0“ stammt … aus Kambodscha, und zwar in der Inschrift K. 127, wo in Ziffern das Śakajahr „605“ genannt wird, das unserem Jahr 683/84 entspricht.“ Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Null

[A courtesy of Amir Aczel, gemeinfrei, Dr. Aczel ist 2015 verstorben]

Abb. 3: Denkmal für Muḥammad ibn Mūsā al-Ḫwārizmī in Chiwa, Usbekistan (Foto: Helmuth Grieb).

Erläuterungen

„Abu Dscha'far Muhammad ibn Musa al-Chwarizmi, * um 780; † zwischen 835 (?) und 850) war ein choresmischer Universalgelehrter, Mathematiker, Astronom und Geograph während der abbasidischen Blütezeit, der zwar aus dem iranischen Choresmien stammte, jedoch den größten Teil seines Lebens in Bagdad verbrachte und dort im „Haus der Weisheit“ tätig war. Von seinem Namen leitet sich der Begriff Algorithmus ab…In seinem Buch über die Indische Zahlschrift (um 825) – die arabische Urfassung dieses Buches ist verlorengegangen, es blieb nur in einer lateinischen Übersetzung mit dem Titel De numero Indorum erhalten – stellte al-Chwarizmi die Arbeit mit Dezimalzahlen vor und führte die Ziffer Null (arabisch: sefr) aus dem indischen in das arabische Zahlensystem und damit in alle modernen Zahlensysteme ein… Im Jahr 830 schloss er die Arbeit an al-Kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ǧabr wa-ʾl-muqābala („Das kurzgefasste Buch über die Rechenverfahren durch Ergänzen und Ausgleichen“) ab. Es ist eine Zusammenstellung von Regeln und Beispielen. Sein – für die damalige Zeit ungewöhnliches – systematisch-logisches Vorgehen gab den Lösungsansätzen linearer und quadratischer Gleichungen eine völlig neue Richtung … Das Buch wurde vom 12. Jahrhundert an mehrfach ins Lateinische übersetzt; dabei wurde der Begriff „Algebra“ aus dem Titel dieses Werkes (al-ǧabr) abgeleitet.“ Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Al-Chwarizm

[Das Foto wurde freundlicherweise vom Urheber, Prof. Dr. Helmuth Grieb, als gemeinfrei zur Verfügung gestellt.]

Abb. 4: Statue Fibonacci, Camposanto di Pisa, 1863 (Foto: Hans-Peter Postel)

URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci

Erläuterungen

„Leonardo da Pisa, auch Fibonacci genannt (* um 1170 in Pisa; † nach 1240 ebenda), war Rechenmeister in Pisa und gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker des Mittelalters. Auf seinen Reisen nach Afrika, Byzanz und Syrien machte er sich mit der arabischen Mathematik vertraut und verfasste mit den dabei gewonnenen Erkenntnissen das Rechenbuch Liber ab(b)aci im Jahre 1202 (Überarbeitung 1228). Bekannt ist daraus heute vor allem die nach ihm benannte Fibonacci-Folge.“
Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci

[Foto: Hans-Peter Postel, gemeinfrei]

Abb. 5: Holzschnitt aus der Margarita philosophica von Gregor Reisch, 1503. Frau Arithmetica ist mit den neuen Zahlen geschmückt und steht als Richterin zwischen dem alten Abakusrechnen, rechts: „Pythagoras“ mit einfacher Verdopplungsaufgabe beschäftigt, und dem neuen Ziffernrechnen, links: „Boethius“ zeigt auf die Null und ist mit schwierigeren Aufgaben befasst, wie der Behandlung von Brüchen (Barrow 2005, S. 156f; Kaplan 2004, S. 124f). Boethius war als spätantiker römischer Gelehrter der wichtigste Vermittler griechischer Logik und Mathematik. Er lebte im 5./6. Jhd. unter der Herrschaft der Ostgoten, also bevor das Wissen um ein Stellenwertsystem Europa erreichte (Kunitzsch 2005, S. 8). Hinweise auf den indisch-arabischen Hintergrund des in der Darstellung siegreichen (Wußing 2013a, S. 311) neuen Ziffernrechnens werden jedoch nicht gegeben. (Foto: Typ 520.03.736, Houghton Library, Harvard University)

URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Gregor_Reisch

Erläuterungen

„Die Margarita philosophica ist eine allgemeine Enzyklopädie aus dem Jahr 1503. Gregor Reisch hat sie im Wesentlichen zwischen 1489 und 1496 in lateinischer Sprache verfasst. … Das Werk enthält als Universitas literarum das gesamte menschliche Wissen des späten Mittelalters. … Das Werk wurde das am weitesten verbreitete Lehrbuch der Philosophie und des enzyklopädischen Wissens für das Studium der Artes liberales und sollte es auch für mehr als 100 Jahre bleiben. Die Margarita philosophica gilt als die älteste gedruckte Enzyklopädie.“ Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Margarita_Philosophica

[Foto der Houghton Library, Harvard University (Typ 520.03.736), gemeinfrei]

Abb. 6: Die Zahlentafel von Jakob Köbel aus dem Buch „Mit der kryde od’ Schreibfedern / durch die zeiferzal zů rechē / Ein neü Rechēpüchlein / den angenden Schülern d’ rechnūg zů erē getrückt“ von 1520 (entnommen dem Beitrag von Richard Hergenhahn „Die Köbelschen Zahlentafeln in seinen Rechenbüchern“ In: Gerritzen 2008, S. 111). Dargestellt sind die bisherigen römischen Zahlen, damals als „deutsche Zahlen“ bezeichnet, und die neuen indo-arabischen Ziffernzahlen im Stellenwertsystem mit Vorschlag ihrer Sprechweise.

Tafel der Zeyfferzale vnnd auch der gemeinen Teütschen zale/ Wie der eyne aus der andern erkant/ gelernt/ vnd verstanden wirt.

1	I	Eyns	27	XXVII	Zweintzig syben
2	II	Zwey	28	XXVIII	Zweintzig acht
3	III	Drey	29	XXIX	Zweintzig neün
4	IIII	Fyer	30	XXX	Dreyssigt
5	V	Fünff	31	XXXI	Dreyssig eins
6	VI	Sechs	32	XXXII	Dreyssig zwey
7	VII	Syben	33	XXXIII	Dreyssig drey
8	VIII	Acht	34	XXXIIII	Dreyssig fyer
9	IX	Neün	35	XXXV	Dreyssig fünff
10	X	Zehen	36	XXXVI	Dreyssig sechs
11	XI	Eylff	37	XXXVII	Dreyssig syben
12	XII	Zwölff	38	XXXVIII	Dreyssig acht
13	XIII	Dreyzehen	39	XXXIX	Dreyssig neün
14	XIIII	Fyerzehen	40	XL	Fyertzigk
15	XV	Fünffzehen	41	XLI	Fyertzig eyns
16	XVI	Sechzehen	42	XLII	Fyertzig zwey
17	XVII	Sybenzehen	43	XLIII	Fyertzig drey
18	XVIII	Achzehen	44	XLIIII	Fyertzig fyer
19	XIX	Neünzehen	45	XLV	Fyertzig fünff
20	XX	Zweintzigk	46	XLVI	Fyertzig sechs
21	XXI	Zweintzigk eins	47	XLVII	Fyertzig syben
22	XXII	Zweintzigk zwey	48	XLVIII	Fyertzig acht
23	XXIII	Zweintzig drey	49	XLIX	Fyertzig neün
24	XXIIII	Zweintzig fyer	50	L	Fünfftzig
25	XXV	Zweintzig fünff	51	LI	Fünfftzig eins
26	XXVI	Zweintzigk sechs	52	LII	Fünfftzig zwey

Erläuterungen

Jakob Köbel kam als Rechtsgelehrter 1494 von Heidelberg nach Oppenheim, um dort das Amt des Stadtschreibers zu übernehmen. Köbel wurde um 1460 geboren, Ries 1492. Köbel schrieb 1514 sein erstes Rechenbuch, Ries im Jahre 1518 (ein Exemplar hiervon ist jedoch bisher nicht nachweisbar, die 2. Auflage stammt aus dem Jahr 1525). Wie der Titel besagt, wird in Köbels Buch von 1520 ausschließlich das Ziffernrechnen gelehrt, wozu nur noch Kreide oder Schreibfedern erforderlich sind. Zehner und Einer von 21 bis 91 werden ausnahmslos unverdreht genannt (nach Hergenhahn, R.: Die Köbelschen Zahlentafeln in seinen Rechenbüchern, in: Gerritzen 2008, S. 109-112).

Abb. 7: Bronzeplastik Adam Ries in Staffelstein, 2009 (Foto: Ulrich Reich).

Erläuterungen

„Adam Ries (oft in der flektierten Form Adam Riese; * 1492 oder 1493 in Staffelstein, Fürstbistum Bamberg; † 30. März oder 2. April 1559 vermutlich in Annaberg oder Wiesa) war ein deutscher Rechenmeister. Bekannt wurde er durch sein Lehrbuch Rechenung auff der linihen und federn..., das bis ins 17. Jahrhundert mindestens 120-mal aufgelegt wurde. Bemerkenswert ist, dass Adam Ries seine Werke nicht – wie damals üblich – in lateinischer, sondern in deutscher Sprache schrieb. Dadurch erreichte er einen großen Leserkreis und konnte darüber hinaus auch zur Vereinheitlichung der deutschen Sprache beitragen. Adam Ries gilt als der `Vater des modernen Rechnens‘. Er hat mit seinen Werken entscheidend dazu beigetragen, dass die römische Zahlendarstellung als unhandlich erkannt und weitgehend durch die nach dem Stellenwertsystem strukturierten indisch-arabischen Zahlzeichen ersetzt wurde. Sein Name ist aus der Redewendung „Nach Adam Riese“ allgemein bekannt.“ Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Adam_Ries

[Das Foto wurde freundlicherweise vom Urheber, Prof. Ulrich Reich, als gemeinfrei zur Verfügung gestellt.]

<u>Abb. 8:</u> Die drei Rechenbücher von Adam Ries aus den Jahren 1518, 1522 und 1550.

Quelle: FOT09
URL: https://www.minet.uni-jena.de/preprints/fothe_09/Fothe-Linienrechnen.pdf

<u>Erläuterungen</u>

„Adam Ries verfasste drei Rechenbücher für den Unterricht in Rechenschulen und für die Ausbildung von Kaufleuten und Handwerkern:

- *Rechnung auff der linihen* (1518): Ries beschreibt darin das Rechnen auf den Linien eines Rechenbretts. Es ist laut dem Vorwort der zweiten Auflage ausdrücklich für Kinder bestimmt.
- *Rechenung auff der linihen und federn...* (1522): Neben dem Rechnen auf dem Rechenbrett beschreibt er in diesem Buch das Ziffernrechnen mit indischen/arabischen Ziffern, Es wurde zu seinen Lebzeiten über hundertmal, bislang mindestens 120-mal aufgelegt und begründete seinen Ruf als deutscher Rechenmeister.
- *Rechenung nach der lenge/ auff den Linihen vnd Feder/.../Mit grüntlichem unterricht des visierens.* (1550): Oft zitiert unter dem Kurztitel „Practica“, da in den einzelnen Kapiteln gleiche praktische Beispiele mit unterschiedlichen Methoden gerechnet werden. Ergänzend zu seinen früheren Büchern hat Ries hier auch das „Visieren“ behandelt, die zu seiner Zeit sehr wichtige Berechnung des Inhalts von Fässern. Das Buch zeigt erstmals auch ein Porträt des Autors, das als einziges zeitgenössisches Bild Ries‘ überhaupt auch einen Hinweis auf sein Geburtsjahr gibt.“

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Adam_Ries

[Diese Abbildungen sind gemeinfrei, da die urheberrechtliche Schutzfrist abgelaufen ist.]

Abb. 9: Gottfried Wilhelm Leibniz. Porträt von Christoph Bernhard Francke, um 1700; Herzog Anton Ulrich-Museum, Braunschweig.

URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz

Erläuterungen

„Gottfried Wilhelm Leibniz (* 1. Juli 1646 in Leipzig; † 14. November 1716 in Hannover) war ein deutscher Philosoph, Mathematiker, Diplomat, Historiker und politischer Berater der frühen Aufklärung. Er gilt als der universale Geist seiner Zeit … Leibnizens Rechenmaschine … war ein historischer Meilenstein im Bau von mechanischen Rechenmaschinen. Das von ihm erfundene Staffelwalzenprinzip, mit dem Multiplikationen auf mechanische Weise realisiert werden konnten, hielt sich über 200 Jahre als unverzichtbare Basistechnik. … Im weiteren Sinne war Leibniz wegbereitend für die Rechenmaschine im heutigen Sinne, den Computer. Er entdeckte, dass sich Rechenprozesse viel einfacher mit einer binären Zahlencodierung durchführen lassen, und ferner, dass sich mittels des binären Zahlencodes die Prinzipien der Arithmetik mit den Prinzipien der Logik verknüpfen lassen (siehe De progressione Dyadica, 1679; oder Explication de l'Arithmetique Binaire, 1703). Die hier erforschten Prinzipien wurden erst 230 Jahre später in der Konstruktion von Rechenmaschinen eingesetzt (z. B. bei der Zuse Z1).“
Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz